

Dízimas Periódicas e Fração Geratriz

Matemática – 8º Ano

Curso completo com definições, propriedades, demonstrações, exemplos e exercícios

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste curso, o estudante deverá ser capaz de:

- 1) distinguir números decimais exatos de dízimas periódicas;
- 2) identificar período e anteperíodo;
- 3) classificar uma dízima periódica como simples ou composta;
- 4) compreender por que toda dízima periódica representa um número racional;
- 5) transformar dízimas periódicas simples em frações geratrizes;
- 6) transformar dízimas periódicas compostas em frações geratrizes;
- 7) verificar uma fração geratriz por divisão;
- 8) comparar representações fracionárias e decimais de números racionais;
- 9) resolver problemas envolvendo dízimas e frações geratrizes.

Sumário

1	Introdução	1
2	Números racionais e representação decimal	1
3	Decimal exato	2
4	Dízima periódica	3
5	Notação da parte periódica	3
6	Período	4
7	Anteperíodo	5

8	Dízima periódica simples	6
9	Dízima periódica composta	6
10	Fração geratriz	7
11	Fração geratriz de dízima simples com período de um algarismo	7
12	Período com dois algarismos	9
13	Período com três ou mais algarismos	11
14	Parte inteira diferente de zero	12
15	Método algébrico geral para dízimas simples	13
16	Fração geratriz de dízima composta	14
17	Regra prática para dízima composta	15
18	Dízima composta com período de dois algarismos	17
19	Dízimas com parte inteira e anteperíodo	18
20	Por que toda dízima periódica é racional?	19
21	Decimal infinito não periódico	20
22	O caso $0,\overline{9}$	21
23	Método geral para obtenção da fração geratriz	22
24	Verificação da fração geratriz	23
25	Comparação de dízimas	24
26	Erros comuns	25
27	Resumo prático das frações geratrizes	27
28	Exercícios	27
28.1	Parte A – Identificação	27
28.2	Parte B – Período e anteperíodo	27

28.3	Parte C – Frações geratrizes simples	28
28.4	Parte D – Parte inteira	28
28.5	Parte E – Dízimas compostas	28
28.6	Parte F – Verificação	29
29	Gabarito comentado	29
29.1	Parte A	29
29.2	Parte B	29
29.3	Parte C	30
29.4	Parte D	30
29.5	Parte E	31
29.6	Parte F	31
30	Avaliação final	32
30.1	Gabarito da avaliação final	33
31	Conclusão	34

1 Introdução

Os números racionais podem ser representados de várias formas. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0,5,$$

e

$$\frac{1}{3} = 0,333333\dots$$

A primeira representação decimal termina após uma quantidade finita de casas decimais. Já a segunda continua indefinidamente, mas apresenta uma repetição regular do algarismo 3.

Esse segundo tipo de representação é chamado de **dízima periódica**.

Observação

As dízimas periódicas são importantes porque mostram que muitos números racionais possuem uma representação decimal infinita, mas organizada por um padrão de repetição.

2 Números racionais e representação decimal

Definição 2.1: Número racional

Um número é racional quando pode ser escrito na forma

$$\frac{a}{b},$$

em que

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

e

$$b \neq 0.$$

O conjunto dos números racionais é representado por:

$$\mathbb{Q}.$$

Exemplo

São números racionais:

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{4}, \quad 7 = \frac{7}{1}, \quad 0,25 = \frac{1}{4}.$$

Teorema 2.1: Representação decimal dos números racionais

Todo número racional possui representação decimal que é:

- finita; ou
- infinita e periódica.

Observação

Assim, números como

0,75

e

0,333333...

são ambos racionais.

3 Decimal exato

Definição 3.1: Decimal exato

Um número decimal é chamado de **decimal exato** quando sua representação decimal possui uma quantidade finita de casas decimais.

Exemplo

São decimais exatos:

0,5,

2,75,

0,125,

14,037.

Exemplo

A fração

$$\frac{3}{4}$$

possui representação decimal exata, pois:

$$3 \div 4 = 0,75.$$

4 Dízima periódica

Definição 4.1: Dízima periódica

Uma **dízima periódica** é uma representação decimal infinita na qual um ou mais algarismos se repetem indefinidamente segundo um padrão fixo.

Exemplo

$0,33333333 \dots$

é uma dízima periódica, pois o algarismo 3 se repete indefinidamente.

Exemplo

$0,27272727 \dots$

é uma dízima periódica, pois o bloco

27

se repete indefinidamente.

Exemplo

$1,245454545 \dots$

também é uma dízima periódica, pois o bloco

45

se repete indefinidamente depois do primeiro algarismo decimal.

5 Notação da parte periódica

Para evitar escrever infinitos algarismos, usamos uma barra sobre o período.

Notação

A dízima

$0,333333 \dots$

pode ser escrita como:

$0,\overline{3}$.

A dízima

$0,272727 \dots$

pode ser escrita como:

$$0,\overline{27}.$$

Exemplo

$$0,\overline{6} = 0,666666 \dots$$

Exemplo

$$2,\overline{35} = 2,35353535 \dots$$

Atenção

A barra deve ser colocada apenas sobre os algarismos que se repetem.
Por exemplo:

$$1,2\overline{47}$$

significa:

$$1,247474747 \dots$$

e não

$$1,247247247 \dots$$

6 Período

Definição 6.1: Período

O **período** de uma dízima periódica é o menor bloco de algarismos que se repete indefinidamente.

Exemplo

Na dízima

$$0,\overline{3},$$

o período é:

$$\boxed{3}.$$

Exemplo

Na dízima

$$0,\overline{27},$$

o período é:

$\boxed{27}.$

Exemplo

Na dízima

$3,145145145\dots,$

o período é:

$\boxed{145}.$

Atenção

O período deve ser o menor bloco possível.
Por exemplo:

$0,777777\dots$

tem período 7, e não 77, 777 ou qualquer bloco maior.

7 Anteperíodo

Algumas dízimas possuem algarismos decimais que aparecem antes do início da repetição.

Definição 7.1: Anteperíodo

O **anteperíodo** é o conjunto de algarismos localizados entre a vírgula decimal e o início do período, que não fazem parte da repetição.

Exemplo

Na dízima:

$0,1\overline{6} = 0,166666\dots,$

o anteperíodo é:

$\boxed{1},$

e o período é:

$\boxed{6}.$

Exemplo

Na dízima:

$2,354\overline{7},$

o anteperíodo é:

e o período é:

 $\boxed{35},$ $\boxed{47}.$

8 Dízima periódica simples

Definição 8.1: Dízima periódica simples

Uma dízima periódica é chamada de **simples** quando o período começa imediatamente após a vírgula decimal.

Exemplo

São dízimas periódicas simples:

 $0,\overline{3},$ $0,\overline{27},$ $1,\overline{45},$ $12,\overline{123}.$

Observação

Uma dízima periódica simples não possui anteperíodo.

9 Dízima periódica composta

Definição 9.1: Dízima periódica composta

Uma dízima periódica é chamada de **composta** quando existem algarismos não periódicos entre a vírgula e o início do período.

Exemplo

São dízimas periódicas compostas:

 $0,1\overline{6},$ $2,35\overline{47},$ $5,002\overline{3}.$

Notação

Resumo:

período começa logo após a vírgula $\Rightarrow$ dízima simples

existe anteperíodo $\Rightarrow$ dízima composta

10 Fração geratriz

Definição 10.1: Fração geratriz

A **fração geratriz** de uma dízima periódica é a fração que representa exatamente o mesmo número racional que a dízima.

Exemplo

A fração geratriz de

$$0,\overline{3}$$

é:

$$\frac{1}{3}.$$

De fato:

$$1 \div 3 = 0,333333 \dots$$

Exemplo

A fração geratriz de

$$0,\overline{6}$$

é:

$$\frac{2}{3}.$$

11 Fração geratriz de dízima simples com período de um algarismo

Considere:

$$x = 0,\overline{3}.$$

Isso significa:

$$x = 0,333333 \dots$$

Multiplicando ambos os lados por 10:

$$10x = 3,333333 \dots$$

Subtraindo a equação original:

$$10x - x = 3,333333 \dots - 0,333333 \dots$$

obtemos:

$$9x = 3.$$

Logo:

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto:

$$\boxed{0,\overline{3} = \frac{1}{3}.$$

Teorema 11.1: Fração geratriz de período simples com um algarismo

Se

$$x = 0,\overline{a},$$

em que a é um algarismo, então:

$$x = \frac{a}{9}.$$

A fração deve ser simplificada quando possível.

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{7}.$$

Resolução

Temos:

$$x = 0,\overline{7}.$$

Multiplicando por 10:

$$10x = 7,\overline{7}.$$

Subtraindo:

$$10x - x = 7.$$

Logo:

$$9x = 7$$

e

$$x = \frac{7}{9}.$$

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{6}.$$

Resolução

Pela regra:

$$0,\overline{6} = \frac{6}{9}.$$

Simplificando:

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Logo:

$$0,\overline{6} = \frac{2}{3}.$$

12 Período com dois algarismos

Considere:

$$x = 0,\overline{27}.$$

Temos:

$$x = 0,27272727 \dots$$

Como o período possui dois algarismos, multiplicamos por:

$$100.$$

Logo:

$$100x = 27,27272727 \dots$$

Subtraindo:

$$100x - x = 27,272727 \dots - 0,272727 \dots$$

obtemos:

$$99x = 27.$$

Portanto:

$$x = \frac{27}{99}.$$

Simplificando:

$$\frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Logo:

$$\boxed{0,\overline{27} = \frac{3}{11}.$$

Teorema 12.1: Fração geratriz de período com dois algarismos

Se

$$x = 0,\overline{ab},$$

então:

$$x = \frac{\overline{ab}}{99},$$

em que $\overline{ab}$ representa o número formado pelos algarismos a e b .

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{45}.$$

Resolução

Como o período possui dois algarismos:

$$x = \frac{45}{99}.$$

Simplificando por 9:

$$\frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Logo:

$$0,\overline{45} = \frac{5}{11}.$$

13 Período com três ou mais algarismos

A mesma ideia continua válida.

Teorema 13.1: Regra geral para dízimas simples

Se uma dízima periódica simples possui período com n algarismos, então sua fração geratriz possui:

- no numerador, o número formado pelos algarismos do período;
- no denominador, n algarismos 9.

Notação

Por exemplo:

$$0,\overline{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}.$$

E:

$$0,\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{9999}.$$

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{125}.$$

Resolução

O período possui três algarismos. Logo:

$$0,\overline{125} = \frac{125}{999}.$$

Como 125 e 999 não possuem divisor comum maior que 1, a fração já está simplificada.

Portanto:

$$\boxed{\frac{125}{999}}.$$

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{216}.$$

Resolução

Temos:

$$0,\overline{216} = \frac{216}{999}.$$

Simplificando por 27:

$$\frac{216}{999} = \frac{8}{37}.$$

Logo:

$$\boxed{0,\overline{216} = \frac{8}{37}}.$$

14 Parte inteira diferente de zero

Considere:

$$x = 2,\overline{3}.$$

Podemos escrever:

$$x = 2 + 0,\overline{3}.$$

Como:

$$0,\overline{3} = \frac{1}{3},$$

temos:

$$x = 2 + \frac{1}{3}.$$

Logo:

$$x = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Portanto:

$$\boxed{2,\overline{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$4,\overline{5}.$$

Resolução

Temos:

$$4,\overline{5} = 4 + \frac{5}{9}.$$

Logo:

$$4 + \frac{5}{9} = \frac{36}{9} + \frac{5}{9} = \frac{41}{9}.$$

Portanto:

$$\boxed{4,\overline{5} = \frac{41}{9}.$$

15 Método algébrico geral para dízimas simples

Considere:

$$x = 3,\overline{27}.$$

Como o período possui dois algarismos:

$$100x = 327,\overline{27}.$$

Subtraindo:

$$100x - x = 327,\overline{27} - 3,\overline{27}.$$

Logo:

$$99x = 324.$$

Então:

$$x = \frac{324}{99}.$$

Simplificando por 9:

$$x = \frac{36}{11}.$$

Portanto:

$$\boxed{3,\overline{27} = \frac{36}{11}.$$

Notação

Para uma dízima simples com n algarismos no período:

- 1) chame a dízima de x ;
- 2) multiplique por 10^n ;
- 3) subtraia a equação original;
- 4) resolva a equação obtida;
- 5) simplifique a fração.

16 Fração geratriz de dízima composta

Agora estudaremos dízimas que possuem anteperíodo.

Considere:

$$x = 0,1\overline{6}.$$

Isso significa:

$$x = 0,1666666\dots$$

O anteperíodo possui um algarismo. Multiplicamos por 10:

$$10x = 1,666666 \dots$$

Agora o período começa imediatamente após a vírgula.

Como o período possui um algarismo, multiplicamos novamente por 10:

$$100x = 16,666666 \dots$$

Subtraindo:

$$100x - 10x = 16,666666 \dots - 1,666666 \dots$$

obtemos:

$$90x = 15.$$

Logo:

$$x = \frac{15}{90}.$$

Simplificando:

$$x = \frac{1}{6}.$$

Portanto:

$$0,1\overline{6} = \frac{1}{6}.$$

17 Regra prática para dízima composta

Existe uma forma prática de obter a fração geratriz.

Teorema 17.1: Regra prática da dízima composta

Para uma dízima periódica composta:

- 1) escreva no numerador o número formado pela parte não periódica e pelo primeiro período completo;
- 2) subtraia o número formado apenas pela parte não periódica;
- 3) no denominador, coloque tantos 9 quanto forem os algarismos do período;
- 4) depois coloque tantos 0 quanto forem os algarismos do anteperíodo;
- 5) simplifique a fração.

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,2\overline{7}.$$

Resolução

O número formado pelo anteperíodo e pelo período é:

$$27.$$

O número formado apenas pelo anteperíodo é:

$$2.$$

Logo, o numerador é:

$$27 - 2 = 25.$$

O período possui um algarismo, então colocamos um 9.

O anteperíodo possui um algarismo, então colocamos um 0.

Assim:

$$x = \frac{25}{90}.$$

Simplificando por 5:

$$x = \frac{5}{18}.$$

Portanto:

$$0,2\overline{7} = \frac{5}{18}.$$

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,12\overline{3}.$$

Resolução

Número formado até completar um período:

$$123.$$

Parte não periódica:

$$12.$$

Numerador:

$$123 - 12 = 111.$$

O período possui um algarismo:

$$9.$$

O anteperíodo possui dois algarismos:

$$00.$$

Logo, o denominador é:

$$900.$$

Assim:

$$x = \frac{111}{900}.$$

Simplificando por 3:

$$x = \frac{37}{300}.$$

Portanto:

$$0,12\bar{3} = \frac{37}{300}.$$

18 Dízima composta com período de dois algarismos

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$0,42\bar{7}.$$

Resolução

O anteperíodo é:

$$4.$$

O período é:

$$27.$$

Número formado até completar um período:

$$427.$$

Parte não periódica:

$$4.$$

Logo, o numerador é:

$$427 - 4 = 423.$$

O período possui dois algarismos, portanto o denominador começa com:

$$99.$$

O anteperíodo possui um algarismo, portanto acrescentamos um zero:

$$990.$$

Assim:

$$x = \frac{423}{990}.$$

Simplificando por 9:

$$x = \frac{47}{110}.$$

Portanto:

$$0,4\overline{27} = \frac{47}{110}.$$

19 Dízimas com parte inteira e anteperíodo

Considere:

$$x = 2,1\overline{6}.$$

Podemos aplicar diretamente o método algébrico.

$$x = 2,166666\ldots$$

Multiplicando por 10:

$$10x = 21,666666\ldots$$

Multiplicando por 100:

$$100x = 216,666666\ldots$$

Subtraindo:

$$100x - 10x = 216,666\ldots - 21,666\ldots$$

Logo:

$$90x = 195.$$

Assim:

$$x = \frac{195}{90}.$$

Simplificando:

$$x = \frac{13}{6}.$$

Portanto:

$$\boxed{2,1\overline{6} = \frac{13}{6}.$$

20 Por que toda dízima periódica é racional?

Teorema 20.1: Toda dízima periódica é racional

Toda dízima periódica representa um número racional.

Justificativa.

Considere uma dízima periódica qualquer. Ao multiplicá-la por uma potência adequada de 10, podemos alinhar duas partes decimais idênticas.

Subtraindo as duas expressões, a parte decimal periódica desaparece, e obtemos uma equação da forma:

$$ax = b,$$

em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.

Portanto:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Como x pode ser escrito como quociente de dois números inteiros, temos:

$$x \in \mathbb{Q}.$$

Observação

Esse resultado é fundamental: uma representação decimal infinita não é necessariamente irracional.

Se os algarismos se repetem periodicamente, o número é racional.

21 Decimal infinito não periódico

Definição 21.1: Decimal infinito não periódico

Um decimal infinito não periódico é uma representação decimal que possui infinitas casas decimais, mas não apresenta um bloco de algarismos que se repete indefinidamente.

Exemplo

O número:

$$3,14159265358979 \dots$$

não apresenta período decimal. Ele corresponde ao número irracional π .

Exemplo

O número:

$$1,41421356237 \dots$$

corresponde a:

$$\sqrt{2},$$

que também é irracional.

Notação

Resumo:

$$\boxed{\text{decimal finito} \Rightarrow \text{racional}}$$

$$\boxed{\text{decimal infinito periódico} \Rightarrow \text{racional}}$$

decimal infinito não periódico $\Rightarrow$ irracional

22 O caso $0,\overline{9}$

Um exemplo interessante é:

$$0,999999 \dots$$

Vamos chamar:

$$x = 0,\overline{9}.$$

Multiplicando por 10:

$$10x = 9,\overline{9}.$$

Subtraindo:

$$10x - x = 9.$$

Logo:

$$9x = 9,$$

portanto:

$$x = 1.$$

Assim:

$$0,\overline{9} = 1.$$

Atenção

$0,\overline{9}$ não é apenas “muito próximo” de 1.
Matematicamente:

$$0,\overline{9} = 1.$$

São duas representações diferentes do mesmo número real.

23 Método geral para obtenção da fração geratriz

Notação

Para uma dízima periódica qualquer:

- 1) defina a dízima como x ;
- 2) conte quantos algarismos existem no anteperíodo;
- 3) multiplique x por uma potência de 10 para deslocar o anteperíodo;
- 4) conte quantos algarismos existem no período;
- 5) multiplique novamente por uma potência de 10 para repetir a mesma parte decimal;
- 6) subtraia as equações;
- 7) resolva para x ;
- 8) simplifique a fração obtida.

Exemplo

Determine a fração geratriz de:

$$x = 0,23\overline{45}.$$

Resolução

O anteperíodo possui dois algarismos.

Multiplicamos por 100:

$$100x = 23,454545 \dots$$

O período possui dois algarismos.

Multiplicamos por mais 100, isto é:

$$10000x = 2345,454545 \dots$$

Subtraindo:

$$10000x - 100x = 2345,454545 \dots - 23,454545 \dots$$

Logo:

$$9900x = 2322.$$

Assim:

$$x = \frac{2322}{9900}.$$

Simplificando:

$$x = \frac{129}{550}.$$

Portanto:

$$0,23\overline{45} = \frac{129}{550}.$$

24 Verificação da fração geratriz

Uma forma importante de verificar o resultado é realizar a divisão.

Exemplo

Verifique se:

$$\frac{5}{11}$$

é a fração geratriz de:

$$0,4\overline{5}.$$

Resolução

Efetuando:

$$5 \div 11$$

obtemos:

$$0,45454545 \dots$$

Portanto:

$$\frac{5}{11} = 0,4\overline{5}.$$

A fração está correta.

25 Comparação de dízimas

Dízimas periódicas podem ser comparadas como outros números decimais.

Exemplo

Compare:

$$0,\overline{4}$$

e

$$0,45.$$

Resolução

Temos:

$$0,\overline{4} = 0,444444 \dots$$

e

$$0,45 = 0,450000 \dots$$

Comparando casa por casa:

$$0,444444 \dots < 0,450000 \dots$$

Logo:

$$0,\overline{4} < 0,45.$$

Exemplo

Compare:

$$0,\overline{7}$$

e

$$\frac{3}{4}.$$

Resolução

Temos:

$$0,\overline{7} = 0,777777 \dots$$

e

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Portanto:

$$0,\overline{7} > \frac{3}{4}.$$

26 Erros comuns

Atenção

Erro 1: confundir período com todos os algarismos depois da vírgula.

Em:

$$0,12\overline{3},$$

o período é apenas:

$$3.$$

O número 12 é o anteperíodo.

Atenção

Erro 2: colocar zeros no lugar dos nove no denominador.

Para:

$$0,\overline{27},$$

o denominador é:

$$99,$$

e não:

100.

Atenção

Erro 3: usar apenas nove em uma dízima composta.

Para:

$$0,2\overline{7},$$

o período tem 1 algarismo e o anteperíodo tem 1 algarismo.

Logo, o denominador é:

$$90,$$

e não 99.

Atenção

Erro 4: esquecer de subtrair a parte não periódica.

Para:

$$0,12\overline{3},$$

não fazemos:

$$\frac{123}{900}.$$

O correto é:

$$\frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900}.$$

Atenção

Erro 5: não simplificar a fração final.

Por exemplo:

$$\frac{45}{99}$$

é correto, mas deve ser simplificado:

$$\frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

27 Resumo prático das frações geratrizes

Dízima	Fração inicial	Resultado
$0,\overline{3}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
$0,\overline{6}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{3}$
$0,\overline{27}$	$\frac{27}{99}$	$\frac{3}{11}$
$0,\overline{45}$	$\frac{45}{99}$	$\frac{5}{11}$
$0,\overline{125}$	$\frac{125}{999}$	$\frac{125}{999}$
$0,1\overline{6}$	$\frac{16-1}{90}$	$\frac{1}{6}$
$0,2\overline{7}$	$\frac{27-2}{90}$	$\frac{5}{18}$
$0,12\overline{3}$	$\frac{123-12}{900}$	$\frac{37}{300}$

28 Exercícios

28.1 Parte A – Identificação

Exercício

Classifique cada número como decimal exato, dízima periódica simples ou dízima periódica composta.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) $0,75$ | e) $1,2\overline{7}$ |
| b) $0,\overline{3}$ | f) $4,12\overline{8}$ |
| c) $0,1\overline{6}$ | g) $0,125$ |
| d) $2,35$ | h) $7,34\overline{5}$ |

28.2 Parte B – Período e anteperíodo

Exercício

Identifique o período e, quando existir, o anteperíodo.

- a) $0,\overline{7}$
- b) $0,\overline{42}$
- c) $3,1\overline{5}$
- d) $2,342\overline{7}$
- e) $0,006\overline{81}$

28.3 Parte C – Frações geratrizes simples

Exercício

Determine a fração geratriz.

a) $0,\overline{2}$

e) $0,\overline{36}$

b) $0,\overline{5}$

f) $0,\overline{72}$

c) $0,\overline{8}$

g) $0,\overline{125}$

d) $0,\overline{18}$

h) $0,\overline{144}$

28.4 Parte D – Parte inteira

Exercício

Determine a fração geratriz.

a) $1,\overline{3}$

b) $2,\overline{5}$

c) $4,\overline{27}$

d) $7,\overline{81}$

28.5 Parte E – Dízimas compostas

Exercício

Determine a fração geratriz.

a) $0,1\overline{2}$

b) $0,3\overline{5}$

c) $0,12\overline{7}$

d) $0,41\overline{8}$

e) $0,23\overline{6}$

f) $1,2\overline{3}$

28.6 Parte F – Verificação

Exercício

Determine a representação decimal de cada fração e indique se é decimal exato ou dízima periódica.

a) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{11}$

b) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{7}{8}$

c) $\frac{2}{9}$

f) $\frac{1}{6}$

29 Gabarito comentado

29.1 Parte A

Resolução

- a) 0,75: decimal exato.
- b) $0,\overline{3}$: dízima periódica simples.
- c) $0,1\overline{6}$: dízima periódica composta.
- d) 2,35: decimal exato.
- e) $1,\overline{27}$: dízima periódica simples.
- f) $4,12\overline{8}$: dízima periódica composta.
- g) 0,125: decimal exato.
- h) $7,3\overline{45}$: dízima periódica composta.

29.2 Parte B

Resolução

- a) período: 7; não possui anteperíodo.
- b) período: 42; não possui anteperíodo.
- c) anteperíodo: 1; período: 5.
- d) anteperíodo: 34; período: 27.
- e) anteperíodo: 006; período: 81.

29.3 Parte C

Resolução

a)

$$0,\overline{2} = \frac{2}{9}.$$

b)

$$0,\overline{5} = \frac{5}{9}.$$

c)

$$0,\overline{8} = \frac{8}{9}.$$

d)

$$0,\overline{18} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

e)

$$0,\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

f)

$$0,\overline{72} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.$$

g)

$$0,\overline{125} = \frac{125}{999}.$$

h)

$$0,\overline{144} = \frac{144}{999} = \frac{16}{111}.$$

29.4 Parte D

Resolução

a)

$$1,\overline{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

b)

$$2,\overline{5} = 2 + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}.$$

c)

$$4,\overline{27} = 4 + \frac{3}{11} = \frac{47}{11}.$$

d)

$$7,\overline{81} = 7 + \frac{81}{99}.$$

Como:

$$\frac{81}{99} = \frac{9}{11},$$

temos:

$$7 + \frac{9}{11} = \frac{86}{11}.$$

29.5 Parte E

Resolução

a)

$$0,1\overline{2} = \frac{12 - 1}{90} = \frac{11}{90}.$$

b)

$$0,3\overline{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}.$$

c)

$$0,12\overline{7} = \frac{127 - 12}{900} = \frac{115}{900} = \frac{23}{180}.$$

d)

$$0,4\overline{18} = \frac{418 - 4}{990} = \frac{414}{990} = \frac{23}{55}.$$

e)

$$0,23\overline{6} = \frac{236 - 23}{900} = \frac{213}{900} = \frac{71}{300}.$$

f) Para

$$x = 1,2\overline{3},$$

temos:

$$10x = 12,\overline{3}$$

e

$$100x = 123,\overline{3}.$$

Subtraindo:

$$90x = 111.$$

Logo:

$$x = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}.$$

29.6 Parte F

Resolução

a)

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

decimal exato.

b)

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

dízima periódica.

c)

$$\frac{2}{9} = 0,\overline{2}$$

dízima periódica.

d)

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$$

dízima periódica.

e)

$$\frac{7}{8} = 0,875$$

decimal exato.

f)

$$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$$

dízima periódica composta.

30 Avaliação final

Avaliação final – Dízimas periódicas e fração geratriz

Resolva as questões abaixo.

1. Defina dízima periódica.

2. Identifique o período de:

$$0,\overline{54}.$$

3. Identifique o anteperíodo e o período de:

$$0,12\overline{7}.$$

4. Classifique:

$$2,\overline{35}.$$

5. Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{4}.$$

6. Determine a fração geratriz de:

$$0,\overline{72}.$$

7. Determine a fração geratriz de:

$$0,1\overline{6}.$$

8. Determine a fração geratriz de:

$$0,234\overline{5}.$$

9. Mostre que:

$$0,\overline{9} = 1.$$

10. Explique por que toda dízima periódica é um número racional.

30.1 Gabarito da avaliação final

Resolução

1. Uma dízima periódica é uma representação decimal infinita na qual um ou mais algarismos se repetem indefinidamente segundo um padrão fixo.

2. O período é:

$$\boxed{54}.$$

3. Anteperíodo:

$$\boxed{12}.$$

Período:

$$\boxed{7}.$$

4. Como o período começa imediatamente após a vírgula:

$\boxed{\text{dízima periódica simples.}}$

5.

$$0,\overline{4} = \frac{4}{9}.$$

6.

$$0,\overline{72} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}.$$

7.

$$0,1\overline{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

8.

$$0,234\overline{5} = \frac{2345 - 23}{9900}.$$

Assim:

$$\frac{2322}{9900}.$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{129}{550}}.$$

9. Seja:

$$x = 0,\overline{9}.$$

Multiplicando por 10:

$$10x = 9,\overline{9}.$$

Subtraindo:

$$10x - x = 9.$$

Logo:

$$9x = 9$$

e:

$$\boxed{x = 1.}$$

Portanto:

$$\boxed{0,\overline{9} = 1.}$$

10. Ao multiplicar uma dízima periódica por uma potência adequada de 10, podemos alinhar as partes periódicas. Subtraindo duas expressões, a parte infinita é eliminada, obtendo uma equação do tipo:

$$ax = b.$$

Assim:

$$x = \frac{b}{a},$$

em que a e b são inteiros.

Logo:

$$\boxed{x \in \mathbb{Q}.}$$

31 Conclusão

As dízimas periódicas são representações decimais infinitas de números racionais. Apesar de possuírem infinitas casas decimais, apresentam um padrão regular de repetição, chamado de período.

As principais ideias estudadas são:

- 1) números racionais possuem representação decimal finita ou periódica;

- 2) o período é o menor bloco de algarismos que se repete;
- 3) o anteperíodo aparece antes do período;
- 4) dízimas simples não possuem anteperíodo;
- 5) dízimas compostas possuem anteperíodo;
- 6) toda dízima periódica possui uma fração geratriz;
- 7) toda dízima periódica representa um número racional.

Notação

Resumo final:

$$0,\overline{a} = \frac{a}{9}$$

$$0,\overline{ab} = \frac{\overline{ab}}{99}$$

$$0,\overline{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

Para dízimas compostas:

numerador = número até um período – parte não periódica

e:

$$\text{denominador} = \underbrace{99 \dots 9}_{\text{algarismos do período}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{algarismos do anteperíodo}}$$

Por fim:

dízima periódica $\Rightarrow$ número racional.

Fim do curso