

Números Reais e Irracionais

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado às habilidades EF09MA01 e EF09MA02 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	A linguagem dos conjuntos numéricos	1
2.1	Elemento, pertinência e inclusão	1
2.2	Conjunto dos números naturais	2
2.3	Conjunto dos números inteiros	2
2.4	Conjunto dos números racionais	3
3	Representação decimal dos números racionais	3
3.1	Decimais finitos	3
3.2	Dízimas periódicas	4
3.3	Caracterização decimal dos racionais	5
4	A insuficiência dos números racionais para medir	6
4.1	Medidas e escolha de uma unidade	6
4.2	A diagonal do quadrado unitário	6
5	Números irracionais	7
5.1	Definição e exemplos	7
5.2	Demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional	8
5.3	Raízes quadradas de números naturais	9
5.4	O número π	10
6	O conjunto dos números reais	10
6.1	Definição e estrutura	10
6.2	Fechamento das operações	11
6.3	Propriedades das operações em $\mathbb{R}$	12
7	A reta real, ordem e intervalos	13
7.1	Correspondência entre números e pontos	13

7.2	Valor absoluto e distância	14
7.3	Intervalos reais	14
7.4	Densidade dos racionais e irracionais	15
8	Localização de irracionais na reta numérica	15
8.1	Estimativa por quadrados perfeitos	15
8.2	Construção geométrica de $\sqrt{2}$	16
8.3	Comparação entre números reais	16
9	Aproximações, arredondamento e erro	17
9.1	Valor exato e valor aproximado	17
9.2	Truncamento e arredondamento	18
9.3	Margem de erro	18
9.4	Método da bisseção para aproximar raízes	19
10	Cálculos exatos com irracionais simples	19
10.1	Simplificação de radicais	19
10.2	Adição e subtração de radicais semelhantes	20
10.3	Multiplicação de expressões com radicais	20
11	Aplicações geométricas e cotidianas	21
11.1	Diagonal de um quadrado	21
11.2	Circunferência e círculo	21
11.3	Altura de um triângulo equilátero	21
12	Estratégias de resolução de problemas	22
13	Erros frequentes e análise de afirmações	23
14	Exercícios de fixação	24
14.1	Conjuntos numéricos e classificação	24
14.2	Representações decimais	25
14.3	Irracionais, raízes e propriedades	25
14.4	Reta real, comparação e aproximação	26
14.5	Problemas contextualizados	26
15	Questões de aprofundamento	27

16 Avaliação-síntese	28
17 Gabarito comentado	28
17.1 Exercícios de fixação	28
17.2 Questões de aprofundamento	30
17.3 Avaliação-síntese	31
18 Resumo final	31

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

Os números surgiram da necessidade de contar, ordenar, medir e comparar. Os números naturais são adequados para contagens; os inteiros permitem representar perdas, dívidas e temperaturas negativas; e os racionais descrevem divisões e razões. Entretanto, certas medidas geométricas não podem ser representadas por nenhuma fração de números inteiros. Essa insuficiência conduz aos **números irracionais** e, finalmente, ao conjunto dos **números reais**.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- reconhecer a necessidade dos números reais na medição de segmentos;
- diferenciar números racionais e irracionais por suas representações;
- reconhecer decimais finitos, dízimas periódicas e decimais infinitos não periódicos;
- classificar números nos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$;
- compreender as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- localizar e estimar números irracionais na reta numérica;
- comparar e ordenar números reais exatos ou aproximados;
- distinguir valor exato de aproximação decimal;
- justificar, por meio de uma demonstração, que $\sqrt{2}$ é irracional;
- resolver problemas de medição que envolvam números reais.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente duas habilidades:

- **EF09MA01:** reconhecer que, fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos cuja medida não é racional;
- **EF09MA02:** reconhecer um irracional como um número real de representação decimal infinita e não periódica e estimar a localização de alguns irracionais na reta numérica.

2 A linguagem dos conjuntos numéricos

2.1 Elemento, pertinência e inclusão

Definição 2.1: Conjunto e elemento

Um **conjunto** é uma coleção bem determinada de objetos. Cada objeto da coleção é chamado de **elemento** do conjunto.

Notação

Se x é elemento de um conjunto A , escrevemos

$$x \in A,$$

e lemos “ x pertence a A ”. Se x não é elemento de A , escrevemos

$$x \notin A.$$

Definição 2.2: Subconjunto

Dizemos que A é **subconjunto** de B , e escrevemos $A \subset B$, quando todo elemento de A também é elemento de B .

Pertinência não é inclusão

Os símbolos $\in$ e $\subset$ desempenham papéis diferentes:

$$-3 \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

O primeiro relaciona um *elemento* com um conjunto. O segundo relaciona dois *conjuntos*.

2.2 Conjunto dos números naturais

Definição 2.3: Números naturais

Adotaremos neste curso a convenção

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Os números naturais são utilizados principalmente em contagens e ordenações.

Observação

Alguns livros usam $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e escrevem $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. As duas convenções são legítimas, desde que se informe qual está sendo usada.

2.3 Conjunto dos números inteiros

Definição 2.4: Números inteiros

O conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Ele reúne os naturais, seus opostos e o zero.

Todo natural é inteiro. Portanto,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

2.4 Conjunto dos números racionais

Definição 2.5: Número racional

Um número é **racional** quando pode ser escrito na forma

$$\frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad q \neq 0.$$

O conjunto de todos os números racionais é indicado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

Exemplo: diferentes formas racionais

Todos os números abaixo são racionais:

$$\frac{3}{5}, \quad -\frac{11}{4}, \quad 7 = \frac{7}{1}, \quad 0 = \frac{0}{9}, \quad 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Em particular, todo inteiro é racional, pois $n = n/1$. Logo,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Observação

A condição $q \neq 0$ é indispensável. A divisão por zero não é definida; por isso, uma expressão como $5/0$ não representa um número racional nem um número real.

3 Representação decimal dos números racionais

3.1 Decimais finitos

Definição 3.1: Decimal finito

Um **decimal finito** é uma representação decimal que possui uma quantidade finita de algarismos após a vírgula.

Exemplo

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad -2,375 = -\frac{2375}{1000} = -\frac{19}{8}.$$

Todo decimal finito é racional, pois pode ser escrito como uma fração cujo denominador é uma potência de 10.

Teorema 3.1: Critério para uma fração possuir decimal finito

Considere uma fração p/q escrita na forma irredutível, com $q > 0$. Sua representação decimal é finita se, e somente se, os únicos fatores primos de q são 2 e 5. Equivalentemente,

$$q = 2^m 5^n$$

para alguns inteiros não negativos m e n .

Demonstração

Uma representação com k casas decimais tem denominador $10^k = 2^k 5^k$. Portanto, se p/q pode ser transformada em uma fração com denominador 10^k , o denominador reduzido q só pode conter os fatores 2 e 5.

Reciprocamente, se $q = 2^m 5^n$, escolha $k = \max\{m, n\}$. Multiplicando o numerador e o denominador pelos fatores que faltam, obtemos denominador $2^k 5^k = 10^k$. Assim, a representação decimal é finita.

Exemplo: aplicação do critério

- $\frac{7}{40}$ possui decimal finito, pois $40 = 2^3 \cdot 5$;
- $\frac{11}{24}$ não possui decimal finito, pois $24 = 2^3 \cdot 3$ contém o fator primo 3.

De fato,

$$\frac{7}{40} = 0,175, \quad \frac{11}{24} = 0,45833 \dots$$

3.2 Dízimas periódicas

Definição 3.2: Dízima periódica

Uma **dízima periódica** é uma representação decimal infinita na qual um algarismo ou um bloco de algarismos se repete indefinidamente. O bloco que se repete é chamado de **período**.

Notação

A barra sobre o período indica repetição indefinida:

$$0,\overline{3} = 0,3333 \dots, \quad 1,2\overline{47} = 1,2474747 \dots$$

Teorema 3.2: Toda dízima periódica é racional

Todo número cuja representação decimal é periódica pode ser escrito como uma fração de dois números inteiros. Portanto, toda dízima periódica é racional.

Demonstração

Mostraremos o procedimento em um caso geral simples. Seja

$$x = 0,\overline{abc},$$

em que abc representa um bloco de três algarismos. Multiplicando por $10^3 = 1000$, deslocamos um período completo:

$$1000x = abc,\overline{abc}.$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, a parte infinita desaparece:

$$1000x - x = abc, \quad 999x = abc, \quad x = \frac{abc}{999}.$$

Logo, x é racional. O mesmo raciocínio funciona para períodos de qualquer comprimento e também para dízimas com parte não periódica.

Exemplo resolvido: dízima periódica simples

Determine a fração geratriz de $x = 0,\overline{27}$.

$$\begin{aligned} x &= 0,272727\dots, \\ 100x &= 27,272727\dots \end{aligned}$$

Subtraindo:

$$100x - x = 27 \implies 99x = 27 \implies x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Exemplo resolvido: dízima periódica composta

Determine a fração geratriz de $x = 1,2\overline{34}$.

A parte não periódica possui um algarismo e o período possui dois:

$$\begin{aligned} x &= 1,2343434\dots, \\ 10x &= 12,343434\dots, \\ 1000x &= 1234,343434\dots \end{aligned}$$

Subtraindo as duas últimas igualdades:

$$1000x - 10x = 1234 - 12,$$

logo

$$990x = 1222 \implies x = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}.$$

3.3 Caracterização decimal dos racionais

Teorema 3.3: Caracterização decimal dos números racionais

Um número real é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica.

Demonstração

Já vimos que todo decimal finito e toda dízima periódica podem ser escritos como frações; portanto, são racionais.

No sentido contrário, considere p/q , com $q \neq 0$. Ao realizar a divisão inteira de p por q , cada etapa produz um resto entre 0 e $q - 1$. Existem, portanto, somente q restos possíveis.

Se em alguma etapa o resto for zero, a divisão termina e o decimal é finito. Se o resto nunca for zero, algum resto deverá repetir-se, pois há infinitas etapas e apenas uma quantidade finita de restos possíveis. A partir da repetição de um resto, repetem-se também os algarismos seguintes. Logo, o decimal é periódico.

Conclusão fundamental

Um decimal infinito não é necessariamente irracional. Por exemplo,

$$0,121212\dots = 0,\overline{12} = \frac{4}{33}$$

é infinito, porém periódico e racional. Para ser irracional, o decimal deve ser simultaneamente **infinito e não periódico**.

4 A insuficiência dos números racionais para medir

4.1 Medidas e escolha de uma unidade

Medir um segmento significa compará-lo com outro segmento escolhido como unidade. Durante muito tempo, acreditou-se que toda medida poderia ser expressa como uma razão entre números inteiros. A geometria mostrou que essa crença era falsa.

Definição 4.1: Segmentos comensuráveis

Dois segmentos são **comensuráveis** quando existe uma unidade menor que cabe um número inteiro de vezes em cada um deles. Nesse caso, a razão entre seus comprimentos é racional.

Definição 4.2: Segmentos incommensuráveis

Dois segmentos são **incommensuráveis** quando não existe uma unidade comum que caiba um número inteiro de vezes em ambos. A razão entre seus comprimentos é irracional.

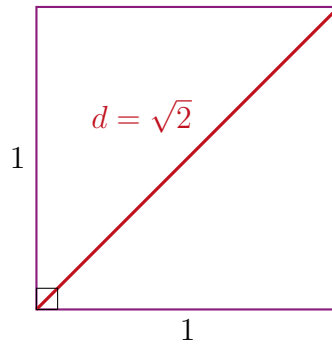
4.2 A diagonal do quadrado unitário

Considere um quadrado de lado 1. Sua diagonal d é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Como $d > 0$, segue que

$$d = \sqrt{2}.$$



Se $\sqrt{2}$ não puder ser escrito como fração, então os números racionais não são suficientes para representar todas as medidas de segmentos.

5 Números irracionais

5.1 Definição e exemplos

Definição 5.1: Número irracional

Um número real é **irracional** quando não pode ser escrito como uma fração p/q , com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Equivalentemente, sua representação decimal é infinita e não periódica.

Notação

Indicaremos o conjunto dos números irracionais por

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Essa escrita significa: o conjunto dos números reais que não pertencem a $\mathbb{Q}$.

Exemplos importantes de números irracionais são

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{5}, \quad \pi, \quad e.$$

No 9º ano, o foco principal está nas raízes não exatas e no número π .

Um decimal irracional construído

Considere

$$x = 0,101001000100001 \dots$$

Entre dois algarismos 1, aparece uma quantidade crescente de zeros. O padrão de construção é compreensível, mas nenhum bloco fixo se repete indefinidamente. Logo, o decimal é infinito e não periódico; portanto, x é irracional.

Padrão de construção não é período

Um número pode possuir uma regra de formação sem ser periódico. Em uma dízima periódica, existe um bloco *fixo* que se repete para sempre. No número $0,1010010001 \dots$, a quantidade de zeros se altera, de modo que não há período fixo.

5.2 Demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional

Teorema 5.1: Irracionalidade de $\sqrt{2}$

O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição

Suponhamos, para obter uma contradição, que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Podemos escolher essa fração na forma irredutível, isto é, sem fator comum entre p e q . Elevando os dois membros ao quadrado,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2.$$

Assim, p^2 é par. Se o quadrado de um inteiro é par, então o próprio inteiro é par. Logo, existe um inteiro k tal que $p = 2k$.

Substituindo $p = 2k$ em $p^2 = 2q^2$,

$$(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2.$$

Portanto, q^2 é par e, pelo mesmo raciocínio, q também é par.

Concluimos que p e q são ambos pares. Assim, possuem o fator comum 2, o que contradiz a escolha de p/q na forma irredutível. A suposição inicial é falsa; portanto,

$$\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}.$$

Estrutura lógica da demonstração

A técnica utilizada chama-se **demonstração por contradição**:

1. supomos temporariamente que a afirmação desejada seja falsa;
2. deduzimos consequências logicamente válidas dessa suposição;
3. chegamos a uma impossibilidade;
4. concluimos que a suposição era falsa e que a afirmação original é verdadeira.

Teorema 5.2: Paridade de um quadrado

Se n é um número inteiro, então n^2 é par se, e somente se, n é par.

Demonstração

Se n é par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Logo,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

e n^2 é par.

Para o sentido inverso, observemos que, se n fosse ímpar, poderíamos escrever $n = 2k + 1$. Então

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

que é ímpar. Portanto, se n^2 é par, n não pode ser ímpar; logo, n é par.

5.3 Raízes quadradas de números naturais

Definição 5.2: Quadrado perfeito

Um número natural n é um **quadrado perfeito** quando existe um natural k tal que $n = k^2$.

Os primeiros quadrados perfeitos são

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$$

Teorema 5.3: Raiz de um número natural

Se $n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt{n}$ é natural quando n é quadrado perfeito e é irracional quando n não é quadrado perfeito.

Demonstração

Se $n = k^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $\sqrt{n} = k$, que é natural e, portanto, racional. Agora suponha que n não seja quadrado perfeito e que, mesmo assim, $\sqrt{n} = p/q$, com p/q irredutível e $q > 0$. Elevando ao quadrado,

$$nq^2 = p^2.$$

Na decomposição em fatores primos de um quadrado, todo expoente é par. Em p^2 , todos os expoentes são pares; em q^2 , também. Para que $nq^2 = p^2$, os expoentes dos fatores de n teriam de ser pares. Isso tornaria n um quadrado perfeito, contrariando a hipótese. Logo, $\sqrt{n}$ é irracional.

Classificando raízes

$$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \in \mathbb{I}, \quad \sqrt{121} = 11 \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{30} \in \mathbb{I}.$$

Os números 49 e 121 são quadrados perfeitos; 18 e 30 não são.

Nem toda raiz é irracional

O símbolo de raiz não determina, sozinho, a classificação do número:

$$\sqrt{64} = 8 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{10} \notin \mathbb{Q}.$$

É necessário verificar se o radicando é um quadrado perfeito ou se a expressão pode ser simplificada para um racional.

5.4 O número π

Definição 5.3: Número π

Para qualquer circunferência, a razão entre o comprimento C e o diâmetro d é constante. Essa constante é indicada por π :

$$\pi = \frac{C}{d}.$$

Consequentemente,

$$C = \pi d = 2\pi r.$$

O número π é irracional e possui representação decimal

$$\pi = 3,141592653589793 \dots$$

sem término e sem período.

Observação

A demonstração rigorosa da irracionalidade de π exige ferramentas que estão além do 9º ano. Neste nível, utilizamos o resultado como um teorema conhecido. As escritas 3,14 e $22/7$ são apenas aproximações de π ; nenhuma delas é igual a π .

6 O conjunto dos números reais

6.1 Definição e estrutura

Definição 6.1: Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais, indicado por $\mathbb{R}$, é formado pela reunião dos números racionais e dos números irracionais:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Além disso,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset,$$

pois nenhum número pode ser simultaneamente racional e irracional.

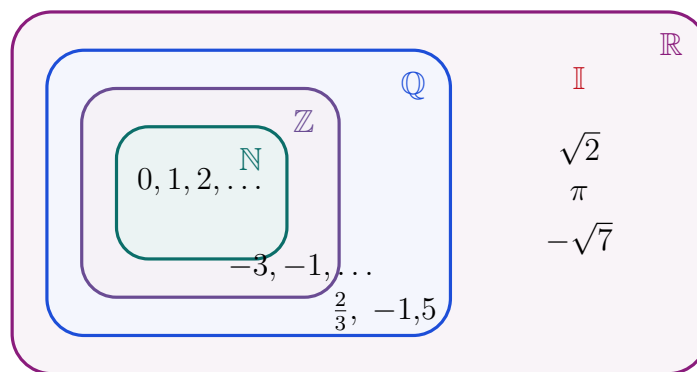
Teorema 6.1: Inclusões dos conjuntos numéricos

Valem as inclusões

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

O conjunto dos irracionais também está contido em $\mathbb{R}$, mas não contém $\mathbb{Q}$ nem está contido nele:

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$



Classificação no menor conjunto possível

Número	Menor conjunto ao qual pertence
15	$\mathbb{N}$, pois é natural
-8	$\mathbb{Z}$, pois é inteiro, mas não natural
$\frac{5}{12}$	$\mathbb{Q}$, pois é racional, mas não inteiro
$0,\overline{7}$	$\mathbb{Q}$, pois é uma dízima periódica
$\sqrt{11}$	$\mathbb{I}$, pois 11 não é quadrado perfeito
π	$\mathbb{I}$

Todos esses números pertencem a $\mathbb{R}$.

6.2 Fechamento das operações

Definição 6.2: Fechamento

Um conjunto numérico é **fechado** para determinada operação quando o resultado da operação entre quaisquer dois elementos do conjunto continua pertencendo ao conjunto.

Teorema 6.2: Fechamento em $\mathbb{R}$

O conjunto $\mathbb{R}$ é fechado para adição, subtração e multiplicação. Também é fechado para divisão, desde que o divisor seja diferente de zero.

Observação

O conjunto dos irracionais, isoladamente, não é fechado para as operações. Por exemplo,

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

e

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Portanto, a soma ou o produto de dois irracionais pode ser racional.

O resultado depende dos números escolhidos

Não existem regras como “racional mais irracional é sempre irracional” para todas as combinações imagináveis sem verificar as hipóteses. Entretanto, se $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{I}$, então $r + x \in \mathbb{I}$. Além disso, se $r \in \mathbb{Q}$ e $r \neq 0$, então $rx \in \mathbb{I}$.

Teorema 6.3: Racional somado a irracional

Se r é racional e x é irracional, então $r + x$ é irracional.

Demonstração

Suponha que $r + x$ fosse racional. Como a diferença de dois racionais é racional, teríamos

$$x = (r + x) - r \in \mathbb{Q},$$

contradizendo o fato de que x é irracional. Logo, $r + x$ é irracional.

Teorema 6.4: Produto por racional não nulo

Se $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ e $x \in \mathbb{I}$, então $rx \in \mathbb{I}$.

Demonstração

Se rx fosse racional, então, como $r \neq 0$,

$$x = \frac{rx}{r}$$

seria racional. Isso contradiz $x \in \mathbb{I}$. Portanto, rx é irracional.

6.3 Propriedades das operações em $\mathbb{R}$

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, valem:

Propriedade	Igualdade
Comutativa da adição	$a + b = b + a$
Associativa da adição	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Elemento neutro aditivo	$a + 0 = a$
Oposto aditivo	$a + (-a) = 0$
Comutativa da multiplicação	$ab = ba$
Associativa da multiplicação	$(ab)c = a(bc)$
Elemento neutro multiplicativo	$a \cdot 1 = a$
Inverso multiplicativo	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, se $a \neq 0$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$

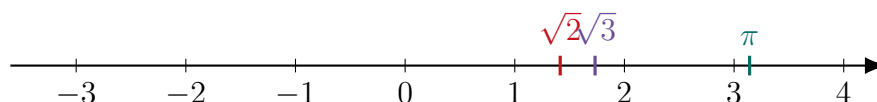
7 A reta real, ordem e intervalos

7.1 Correspondência entre números e pontos

Axioma 7.1: Continuidade da reta real

A cada número real corresponde um único ponto da reta numérica, e a cada ponto da reta numérica corresponde um único número real.

Os racionais ocupam muitos pontos da reta, mas não todos. Os irracionais preenchem os pontos que não correspondem a números racionais.



Definição 7.1: Ordem na reta real

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $a < b$ quando o ponto que representa a está à esquerda do ponto que representa b na reta real.

Teorema 7.1: Tricotomia

Para quaisquer números reais a e b , exatamente uma das relações abaixo é verdadeira:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

7.2 Valor absoluto e distância

Definição 7.2: Valor absoluto

O valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância entre x e 0 na reta real.

Teorema 7.2: Distância entre dois números reais

A distância entre os pontos que representam a e b é

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Exemplo

A distância entre $-\sqrt{2}$ e 3 é

$$|-\sqrt{2} - 3| = |-(3 + \sqrt{2})| = 3 + \sqrt{2}.$$

Usando $\sqrt{2} \approx 1,414$, obtemos a aproximação 4,414.

7.3 Intervalos reais

Definição 7.3: Intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$.

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Colchete voltado para o número indica que o extremo pertence ao intervalo; colchete invertido indica que ele não pertence.

Observação

Também é comum escrever intervalos abertos como (a, b) , especialmente em livros estrangeiros. Neste material, usamos $]a, b[$ para evitar confusão com pares ordenados.

7.4 Densidade dos racionais e irracionais

Teorema 7.3: Densidade dos números racionais

Entre dois números reais distintos sempre existe pelo menos um número racional. Na verdade, existem infinitos números racionais entre eles.

Exemplo

Entre $\sqrt{2} \approx 1,4142$ e $\sqrt{3} \approx 1,7320$ podemos encontrar, por exemplo,

$$1,5 = \frac{3}{2}, \quad 1,6 = \frac{8}{5}, \quad 1,7 = \frac{17}{10}.$$

Todos são racionais.

Teorema 7.4: Densidade dos números irracionais

Entre dois números reais distintos sempre existe pelo menos um número irracional. Na verdade, existem infinitos números irracionais entre eles.

Justificativa acessível

Se $a < b$, existe um racional r entre os números $a/\sqrt{2}$ e $b/\sqrt{2}$. Multiplicando a desigualdade por $\sqrt{2} > 0$, obtemos

$$a < r\sqrt{2} < b.$$

Se $r \neq 0$, então $r\sqrt{2}$ é irracional, pois é o produto de um racional não nulo por um irracional. Assim, há um irracional entre a e b . Repetindo o procedimento em subintervalos, obtemos infinitos irracionais.

Observação

A palavra **denso** não significa que um conjunto tenha seus elementos “colados”. Significa que, entre quaisquer dois números reais distintos, é possível encontrar elementos daquele conjunto. Tanto $\mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{I}$ são densos em $\mathbb{R}$.

8 Localização de irracionais na reta numérica

8.1 Estimativa por quadrados perfeitos

Teorema 8.1: Enquadramento de uma raiz

Se $a, b, n \geq 0$ e

$$a^2 < n < b^2,$$

então

$$a < \sqrt{n} < b.$$

Demonstração

Entre números não negativos, elevar ao quadrado preserva a ordem. Assim, a desigualdade $a^2 < n$ implica $a < \sqrt{n}$, e $n < b^2$ implica $\sqrt{n} < b$.

Exemplo resolvido: localização de $\sqrt{10}$

Como

$$3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2,$$

temos

$$3 < \sqrt{10} < 4.$$

Para obter uma casa decimal, testamos os décimos:

$$3,1^2 = 9,61 < 10 \quad \text{e} \quad 3,2^2 = 10,24 > 10.$$

Logo,

$$3,1 < \sqrt{10} < 3,2.$$

Testando os centésimos,

$$3,16^2 = 9,9856 < 10, \quad 3,17^2 = 10,0489 > 10.$$

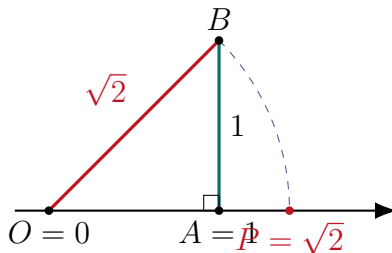
Portanto,

$$3,16 < \sqrt{10} < 3,17.$$

8.2 Construção geométrica de $\sqrt{2}$

Podemos localizar $\sqrt{2}$ exatamente na reta usando régua e compasso:

1. marque os pontos $O = 0$ e $A = 1$ na reta;
2. construa, em A , um segmento perpendicular AB de comprimento 1;
3. ligue O a B ; pelo Teorema de Pitágoras, $OB = \sqrt{2}$;
4. com centro em O e raio OB , trace um arco que intercepte a reta no ponto P ;
5. o ponto P representa $\sqrt{2}$.



8.3 Comparação entre números reais

Para comparar números escritos de formas diferentes, podemos:

1. obter aproximações decimais com precisão suficiente;
2. comparar quadrados, quando os números são raízes não negativas;
3. utilizar desigualdades conhecidas entre quadrados perfeitos;
4. transformar racionais em frações ou decimais equivalentes.

Exemplo: comparar $\sqrt{7}$ e 2,6

Como ambos são positivos, podemos comparar seus quadrados:

$$(2,6)^2 = 6,76 < 7 = (\sqrt{7})^2.$$

Logo,

$$2,6 < \sqrt{7}.$$

Exemplo: ordenar números reais

Ordene $-\sqrt{5}$, $-2,1$, 0 , $\sqrt{3}$ e $1,8$.

Como

$$\sqrt{5} \approx 2,236 \quad \text{e} \quad \sqrt{3} \approx 1,732,$$

temos

$$-\sqrt{5} < -2,1 < 0 < \sqrt{3} < 1,8.$$

Observe que, entre negativos, o número de maior valor absoluto é o menor.

9 Aproximações, arredondamento e erro

9.1 Valor exato e valor aproximado

Definição 9.1: Valor exato

Um **valor exato** representa o número sem perda de informação. Exemplos:

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \frac{7}{3}.$$

Definição 9.2: Valor aproximado

Um **valor aproximado** substitui um número por outro próximo, geralmente com uma quantidade finita de casas decimais. Utilizamos o símbolo $\approx$:

$$\sqrt{2} \approx 1,414, \quad \pi \approx 3,14.$$

Igualdade e aproximação

Nunca escreva $\pi = 3,14$ ou $\sqrt{2} = 1,41$. As igualdades são falsas. O correto é

$$\pi \approx 3,14, \quad \sqrt{2} \approx 1,41.$$

9.2 Truncamento e arredondamento

Definição 9.3: Truncamento

Truncar um número em determinada casa decimal significa eliminar todos os algarismos posteriores, sem alterar o último algarismo mantido.

Definição 9.4: Arredondamento

Para arredondar um número em determinada casa decimal, observamos o primeiro algarismo descartado:

- se ele é menor que 5, mantemos o último algarismo conservado;
- se ele é maior ou igual a 5, acrescentamos uma unidade ao último algarismo conservado.

Exemplo

Como $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$:

- truncado nos centésimos: 1,41;
- arredondado nos centésimos: 1,41;
- truncado nos milésimos: 1,414;
- arredondado nos milésimos: 1,414;
- arredondado nos décimos: 1,4.

Para $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$, o arredondamento nos centésimos é 1,73.

9.3 Margem de erro

Definição 9.5: Erro absoluto

Se x é o valor exato e a é uma aproximação, o **erro absoluto** é

$$E_a = |x - a|.$$

Teorema 9.1: Erro máximo de arredondamento

Quando um número é arredondado para n casas decimais, o erro absoluto é, no máximo,

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}.$$

Exemplo

Ao arredondar para duas casas decimais, o erro máximo é

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0,005.$$

Assim, se uma medida foi registrada como 2,37 por arredondamento aos centésimos, o valor original pertence ao intervalo

$$[2,365, 2,375[.$$

9.4 Método da bisseção para aproximar raízes

O método da bisseção consiste em reduzir sucessivamente um intervalo que contém a raiz procurada.

Exemplo: aproximação de $\sqrt{5}$

Inicialmente,

$$2^2 < 5 < 3^2,$$

portanto $2 < \sqrt{5} < 3$. Testamos o ponto médio 2,5:

$$2,5^2 = 6,25 > 5,$$

logo $2 < \sqrt{5} < 2,5$. O ponto médio agora é 2,25:

$$2,25^2 = 5,0625 > 5,$$

então $2 < \sqrt{5} < 2,25$. Testando 2,125:

$$2,125^2 = 4,515625 < 5,$$

obtemos $2,125 < \sqrt{5} < 2,25$. Continuando o processo, aproximamo-nos de

$$\sqrt{5} \approx 2,2360679.$$

10 Cálculos exatos com irracionais simples

10.1 Simplificação de radicais

Teorema 10.1: Produto de raízes quadradas

Para $a, b \geq 0$,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Essa propriedade permite retirar do radical fatores que são quadrados perfeitos.

Exemplo

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Assim, $\sqrt{72}$ e $6\sqrt{2}$ são exatamente o mesmo número.

A raiz não distribui sobre a soma

Em geral,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Por exemplo,

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

enquanto

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

10.2 Adição e subtração de radicais semelhantes

Definição 10.1: Radicais semelhantes

Radicaís são **semelhantes** quando, após simplificação, apresentam o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplo

$$\begin{aligned}3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} &= 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{8} + \sqrt{18} &= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não pode ser reduzido a um único radical por adição.

10.3 Multiplicação de expressões com radicais

Exemplo

$$(2\sqrt{3})(5\sqrt{6}) = 10\sqrt{18} = 10 \cdot 3\sqrt{2} = 30\sqrt{2}.$$

Exemplo: uso da distributiva

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) &= (\sqrt{5})^2 - 2^2 \\ &= 5 - 4 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Extensão opcional: racionalização

Racionalizar um denominador significa escrever uma fração equivalente sem radical no denominador. Por exemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esse procedimento será aprofundado no estudo de radiciação e potências com expoentes fracionários.

11 Aplicações geométricas e cotidianas

11.1 Diagonal de um quadrado

Teorema 11.1: Diagonal do quadrado

Se um quadrado possui lado ℓ , então sua diagonal mede

$$d = \ell\sqrt{2}.$$

Demonstração

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2.$$

Como d e ℓ são medidas não negativas,

$$d = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}.$$

Exemplo

Um piso quadrado possui lado de 80 cm. Sua diagonal exata é

$$d = 80\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Usando $\sqrt{2} \approx 1,4142$,

$$d \approx 80 \cdot 1,4142 = 113,136 \text{ cm.}$$

Arredondando aos décimos, $d \approx 113,1$ cm.

11.2 Circunferência e círculo

Exemplo

Uma roda possui diâmetro de 60 cm. O comprimento exato de sua circunferência é

$$C = \pi d = 60\pi \text{ cm.}$$

Usando $\pi \approx 3,1416$,

$$C \approx 188,496 \text{ cm.}$$

O valor 60π é exato; 188,496 é aproximado.

11.3 Altura de um triângulo equilátero

Teorema 11.2: Altura do triângulo equilátero

Se um triângulo equilátero possui lado ℓ , então sua altura é

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Demonstração

A altura divide a base em dois segmentos de comprimento $\ell/2$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos formados,

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2.$$

Logo,

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \implies h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Atividade investigativa: medindo π

Separe três objetos circulares de tamanhos diferentes, um barbante e uma régua. Para cada objeto:

1. meça o diâmetro d ;
2. envolva o contorno com o barbante e meça o comprimento C ;
3. calcule C/d ;
4. compare os resultados com $\pi \approx 3,1416$;
5. discuta as diferenças causadas pelos erros de medição.

Organize os dados em uma tabela contendo objeto, diâmetro, comprimento, razão C/d e erro absoluto em relação a π .

12 Estratégias de resolução de problemas

Roteiro para classificar um número

Ao classificar um número, siga esta sequência:

1. simplifique a expressão, se possível;
2. verifique se é natural;
3. caso não seja natural, verifique se é inteiro;
4. caso não seja inteiro, procure uma representação fracionária ou decimal finita/periódica;
5. se a representação decimal for infinita e não periódica, classifique-o como irracional;
6. lembre-se de que todo racional e todo irracional é real.

Roteiro para localizar $\sqrt{n}$

1. encontre quadrados perfeitos consecutivos entre os quais está n ;
2. extraia as raízes dos extremos para obter o intervalo de comprimento 1;

3. teste décimos, elevando-os ao quadrado;
4. se necessário, repita com centésimos e milésimos;
5. marque na reta o ponto aproximado obtido.

Problema integrado

Uma praça quadrada tem área de 200 m^2 .

a) Qual é a medida exata do lado?

Se ℓ é o lado, então

$$\ell^2 = 200 \implies \ell = \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2} \text{ m.}$$

b) O lado é racional ou irracional?

Como $\sqrt{2}$ é irracional e 10 é racional não nulo, $10\sqrt{2}$ é irracional.

c) Determine uma aproximação aos centésimos.

$$\ell \approx 10 \cdot 1,41421356 = 14,1421356 \text{ m,}$$

portanto $\ell \approx 14,14 \text{ m}$.

d) Qual é a diagonal exata da praça?

$$d = \ell\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20 \text{ m.}$$

É possível que uma figura tenha lado irracional e diagonal racional.

13 Erros frequentes e análise de afirmações

Erro 1: todo decimal infinito é irracional

Falso. A dízima $0,\bar{3}$ é infinita, mas

$$0,\bar{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}.$$

Erro 2: todo número com raiz é irracional

Falso. $\sqrt{81} = 9$ é natural. É necessário simplificar a expressão antes de classificá-la.

Erro 3: a soma de irracionais é sempre irracional

Falso. Por exemplo,

$$\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) = 2.$$

Os dois termos são irracionais, mas a soma é racional.

Erro 4: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Falso em geral. Utilize um contraexemplo:

$$\sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 1+2 = \sqrt{1} + \sqrt{4}.$$

Erro 5: aproximação é igualdade

Falso. 3,14 é racional e π é irracional. Logo, não podem ser iguais:

$$\pi \neq 3,14, \quad \pi \approx 3,14.$$

Erro 6: entre dois números consecutivos não há outros números

Entre inteiros consecutivos não existe outro *inteiro*, mas existem infinitos números reais. Entre 2 e 3, por exemplo, estão

$$\frac{5}{2}, \quad \sqrt{7}, \quad 2,99, \quad 2,999, \dots$$

14 Exercícios de fixação

14.1 Conjuntos numéricos e classificação

1. Classifique cada número no menor conjunto entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ ao qual pertence:

$$0, \quad -12, \quad \frac{7}{8}, \quad 4,25, \quad 0,\overline{18}, \quad \sqrt{64}, \quad \sqrt{13}, \quad -\pi.$$

2. Complete com $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

a) -4 _____ $\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{I}$ _____ $\mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbb{Q}$;

e) $\frac{0}{3}$ _____ $\mathbb{N}$;

c) $\mathbb{N}$ _____ $\mathbb{R}$;

f) π _____ $\mathbb{R}$.

3. Determine quais afirmações são verdadeiras e corrija as falsas:

a) todo natural é inteiro;

b) todo inteiro é natural;

c) todo racional é real;

d) todo real é racional;

e) nenhum irracional é racional;

f) todo irracional é real.

4. Dê um exemplo de:

a) inteiro que não seja natural;

- b) racional que não seja inteiro;
- c) irracional entre 2 e 3;
- d) racional entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

14.2 Representações decimais

5. Classifique cada representação como decimal finito, dízima periódica ou decimal infinito não periódico:

- a) 0,375;
- b) $2,\overline{45}$;
- c) 1,414213562... sem período;
- d) $-0,1\overline{6}$;
- e) 3,14159265... sem período.

6. Sem efetuar a divisão, determine quais frações possuem representação decimal finita:

$$\frac{3}{20}, \quad \frac{7}{24}, \quad \frac{13}{125}, \quad \frac{11}{30}, \quad \frac{9}{40}.$$

7. Encontre a fração geratriz:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a) $0,\overline{6}$; | d) $0,1\overline{7}$; |
| b) $0,\overline{45}$; | e) $2,3\overline{15}$; |
| c) $1,\overline{2}$; | f) $0,\overline{009}$. |

8. Explique por que o número $0,12345678910111213\dots$, obtido pela justaposição dos números naturais, não é uma dízima periódica.

14.3 Irracionais, raízes e propriedades

9. Classifique como racional ou irracional, justificando:

$$\sqrt{36}, \quad \sqrt{20}, \quad \frac{\sqrt{49}}{7}, \quad 3 + \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \quad \pi - 3.$$

10. Simplifique e classifique:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{12}$; | d) $\sqrt{200}$; |
| b) $\sqrt{50}$; | e) $\sqrt{147}$; |
| c) $\sqrt{108}$; | f) $\sqrt{288}$. |

11. Calcule, mantendo a forma exata:

- a) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$; d) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$;
 b) $\sqrt{8} + \sqrt{32}$; e) $(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)$;
 c) $3\sqrt{5} - \sqrt{45}$; f) $(2 + \sqrt{3})^2$.

12. Dê um contraexemplo para cada afirmação falsa:

- a) a soma de dois irracionais é sempre irracional;
 b) o produto de dois irracionais é sempre irracional;
 c) a soma de dois racionais é irracional;
 d) toda raiz quadrada é irracional.

13. Demonstre que $\sqrt{3}$ é irracional, adaptando a demonstração feita para $\sqrt{2}$. Use o fato de que, se 3 divide p^2 , então 3 divide p .

14.4 Reta real, comparação e aproximação

14. Sem usar calculadora, determine entre quais inteiros consecutivos estão:

$$\sqrt{6}, \quad \sqrt{15}, \quad \sqrt{30}, \quad \sqrt{70}, \quad \sqrt{120}.$$

15. Determine entre quais décimos consecutivos está $\sqrt{7}$.

16. Determine entre quais centésimos consecutivos está $\sqrt{3}$.

17. Compare usando $<$, $>$ ou $=$:

- a) $\sqrt{5}$ ____ 2,2; c) $3\sqrt{2}$ ____ 4,3;
 b) $\sqrt{10}$ ____ 3,2; d) π ____ $\frac{22}{7}$.

18. Coloque em ordem crescente:

$$-\sqrt{3}, \quad -1,8, \quad \frac{3}{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \pi.$$

19. Arredonde para duas casas decimais:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{11}, \quad \pi.$$

20. Uma aproximação de $\sqrt{13}$ é 3,61. Sem conhecer todas as casas decimais de $\sqrt{13}$, verifique se essa aproximação é por falta ou por excesso.

14.5 Problemas contextualizados

21. Um terreno quadrado tem lado de 25 m. Determine a diagonal na forma exata e aproximada aos centésimos.

22. Uma televisão retangular possui largura de 96 cm e altura de 54 cm. Calcule a diagonal exata e uma aproximação aos décimos.

- 23.** Uma circunferência possui raio de 7 cm. Determine o comprimento exato e uma aproximação usando $\pi \approx 3,1416$.
- 24.** Um triângulo equilátero possui lado de 12 cm. Determine sua altura exata e aproximada aos centésimos.
- 25.** Uma praça quadrada possui diagonal de 30 m. Determine o lado da praça na forma exata e aproximada aos centésimos.
- 26.** Uma roda de bicicleta tem diâmetro de 70 cm. Aproximadamente quantos metros ela percorre ao completar 100 voltas? Use $\pi \approx 3,1416$.
- 27.** A área de um quadrado é 50 cm^2 .
- a) determine o lado exato;
 - b) classifique essa medida como racional ou irracional;
 - c) determine o perímetro exato;
 - d) aproxime o perímetro aos centésimos.

15 Questões de aprofundamento

- A1.** Prove que não existe o maior número racional menor que $\sqrt{2}$.
- A2.** Se x é irracional, prove que $-x$ também é irracional.
- A3.** Se x é irracional e r é racional, é possível que $x+r$ seja racional? Justifique rigorosamente.
- A4.** Encontre dois números irracionais cuja soma seja racional e cujo produto também seja racional.
- A5.** Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional. Sugestão: suponha que seja racional, isole uma das raízes e eleve ao quadrado.
- A6.** O número
- $$y = 0,01001000100001000001\dots$$
- é racional ou irracional? Justifique pela estrutura decimal.
- A7.** Determine um número racional e um irracional no intervalo $]\sqrt{5}, \sqrt{6}[$.
- A8.** Um estudante escreveu:
- $$\sqrt{18} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}.$$
- Identifique o erro e apresente a simplificação correta.
- A9.** Mostre que $0,9999\dots = 1$ por meio de uma fração geratriz.
- A10.** Explique por que a calculadora não pode exibir todos os algarismos de um número irracional e por que isso não transforma o número em racional.

16 Avaliação-síntese

1. Explique, com suas palavras, por que os números racionais não são suficientes para medir todos os segmentos.

2. Classifique no menor conjunto possível:

$$-5, \quad \frac{13}{4}, \quad \sqrt{100}, \quad \sqrt{17}, \quad 0,\overline{125}, \quad \pi.$$

3. Transforme $0,2\overline{7}$ em fração irredutível.

4. Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional.

5. Localize $\sqrt{20}$ entre dois décimos consecutivos.

6. Ordene:

$$2,23, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{9}{4}, \quad 2,3.$$

7. Calcule exatamente:

$$\sqrt{75} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}.$$

8. Um quadrado possui área de 72 m^2 . Determine o lado e a diagonal na forma exata.

9. Julgue e justifique: “Se a e b são irracionais, então $a + b$ é irracional.”

10. Diferencie, conceitualmente, π e $3,14$.

17 Gabarito comentado

17.1 Exercícios de fixação

1.

Número	0	-12	$\frac{7}{8}$	4,25	$0,\overline{18}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{13}$	$-\pi$
Menor conjunto	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$

2. a) $\in$; b) $\notin$; c) $\subset$; d) $\not\subset$; e) $\in$; f) $\in$.

3. a) verdadeira; b) falsa, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$; c) verdadeira; d) falsa, pois $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; e) verdadeira; f) verdadeira.

4. Respostas possíveis: a) -2 ; b) $1/2$; c) $\sqrt{5}$; d) $3/2$, pois $\sqrt{2} < 1,5 < \sqrt{3}$.

5. a) finito; b) dízima periódica; c) infinito não periódico; d) dízima periódica; e) infinito não periódico.

6. Possuem decimal finito $3/20$, $13/125$ e $9/40$. Após redução, seus denominadores apresentam apenas fatores 2 e 5.

7. a) $\frac{2}{3}$;

b) $\frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \frac{11}{9}; & \text{e)} \frac{2315 - 23}{990} = \frac{2292}{990} = \frac{382}{165}; \\ \text{d)} \frac{16}{90} = \frac{8}{45}; & \text{f)} \frac{9}{999} = \frac{1}{111}. \end{array}$$

8. Os blocos formados pela justaposição dos naturais mudam de comprimento e conteúdo indefinidamente; não existe um bloco fixo que passe a se repetir para sempre. Logo, não é uma dízima periódica.

9.

$$\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \in \mathbb{I}, \quad \frac{\sqrt{49}}{7} = 1 \in \mathbb{Q},$$

$$3 + \sqrt{2} \in \mathbb{I}, \quad \sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}, \quad \pi - 3 \in \mathbb{I}.$$

10. a) $2\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{3}$; d) $10\sqrt{2}$; e) $7\sqrt{3}$; f) $12\sqrt{2}$. Todas são irracionais.

11. a) $9\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 0$; d) $\sqrt{144} = 12$; e) $7 - 1 = 6$; f) $7 + 4\sqrt{3}$.

12. Contraexemplos possíveis:

a) $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$;

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$;

c) a afirmação é impossível: a soma de racionais é sempre racional;

d) $\sqrt{9} = 3$.

13. A demonstração segue a estrutura da prova de $\sqrt{2}$. Se $\sqrt{3} = p/q$ em forma irredutível, então $p^2 = 3q^2$. Disso segue que $3 \mid p$, de modo que $p = 3k$. Substituindo, obtém-se $q^2 = 3k^2$ e $3 \mid q$. Assim, p e q teriam fator comum 3, uma contradição.

14.

$$2 < \sqrt{6} < 3, \quad 3 < \sqrt{15} < 4, \quad 5 < \sqrt{30} < 6,$$

$$8 < \sqrt{70} < 9, \quad 10 < \sqrt{120} < 11.$$

15. $2,6^2 = 6,76 < 7$ e $2,7^2 = 7,29 > 7$; portanto, $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$.

16. $1,73^2 = 2,9929 < 3$ e $1,74^2 = 3,0276 > 3$; portanto, $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

17. a) $>$; b) $<$; c) $<$, pois $3\sqrt{2} \approx 4,243$; d) $<$, pois $\pi \approx 3,14159$ e $22/7 \approx 3,142857$.

18.

$$-1,8 < -\sqrt{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < \pi.$$

19.

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \quad \sqrt{5} \approx 2,24, \quad \sqrt{11} \approx 3,32, \quad \pi \approx 3,14.$$

20. Como $3,61^2 = 13,0321 > 13$, temos $3,61 > \sqrt{13}$. A aproximação é por excesso.

21. $d = 25\sqrt{2} \text{ m} \approx 35,36 \text{ m}$.

22.

$$d = \sqrt{96^2 + 54^2} = \sqrt{12132} = 6\sqrt{337} \text{ cm} \approx 110,1 \text{ cm}.$$

23. $C = 14\pi \text{ cm} \approx 43,9824 \text{ cm}$.

24.

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm} \approx 10,39 \text{ cm}.$$

25. Da relação $30 = \ell\sqrt{2}$,

$$\ell = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} \text{ m} \approx 21,21 \text{ m}.$$

26. Em uma volta, $C = 70\pi \text{ cm}$. Em 100 voltas,

$$7000\pi \text{ cm} = 70\pi \text{ m} \approx 219,912 \text{ m}.$$

27. a) $\ell = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$; b) irracional; c) $P = 20\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $P \approx 28,28 \text{ cm}$.

17.2 Questões de aprofundamento

A1. Se existisse um maior racional $r < \sqrt{2}$, o número $(r + \sqrt{2})/2$ estaria entre r e $\sqrt{2}$. Embora essa média seja irracional, pela densidade dos racionais existe um racional entre ela e $\sqrt{2}$, maior que r , contradizendo a maximalidade. Logo, tal maior racional não existe.

A2. Se $-x$ fosse racional, seu oposto $-(-x) = x$ também seria racional, contradizendo a hipótese. Logo, $-x$ é irracional.

A3. Não. Pelo teorema da soma, racional mais irracional é irracional.

A4. Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$: a soma é 0 e o produto é -2 .

A5. Suponha $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Então $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$. Elevando ao quadrado,

$$3 = r^2 + 2 - 2r\sqrt{2} \implies \sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r}.$$

Como $r \neq 0$ e o lado direito seria racional, teríamos uma contradição. Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

A6. É irracional: a quantidade de zeros entre algarismos 1 aumenta e não existe um período fixo.

A7. Uma resposta possível é $23/10 = 2,3$ e $\sqrt{11}/\sqrt{2} = \sqrt{11/2}$. Com efeito, $\sqrt{5} \approx 2,236$ e $\sqrt{6} \approx 2,449$.

A8. A raiz não distribui sobre a soma. O correto é $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

A9. Se $x = 0,\bar{9}$, então $10x = 9,\bar{9}$. Subtraindo, $9x = 9$, logo $x = 1$.

A10. A calculadora possui memória e visor finitos, por isso apresenta apenas uma aproximação. A classificação depende do número exato, não da quantidade de algarismos exibidos pelo aparelho.

17.3 Avaliação-síntese

1. A diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$, e $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como fração. Portanto, existem medidas não racionais.
2. $-5 \in \mathbb{Z}$; $13/4 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{17} \in \mathbb{I}$; $0,12\overline{5} \in \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{I}$.
3. Se $x = 0,2777\dots$, então $10x = 2,777\dots$ e $100x = 27,777\dots$. Subtraindo, $90x = 25$, portanto $x = 25/90 = 5/18$.
4. Deve-se apresentar a demonstração por contradição desenvolvida na Seção 5: a hipótese $\sqrt{2} = p/q$ em forma irredutível implica que p e q são ambos pares.
5. $4,4^2 = 19,36 < 20$ e $4,5^2 = 20,25 > 20$; logo, $4,4 < \sqrt{20} < 4,5$.
6. Como $\sqrt{5} \approx 2,236$, temos

$$2,23 < \sqrt{5} < \frac{9}{4} < 2,3.$$

7.

$$\sqrt{75} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

8. O lado é

$$\ell = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ m.}$$

A diagonal é

$$d = \ell\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12 \text{ m.}$$

9. Falsa. O contraexemplo $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ mostra que a soma de dois irracionais pode ser racional.
10. π é um número irracional e exato; $3,14 = 157/50$ é racional e constitui apenas uma aproximação de π .

18 Resumo final

Mapa conceitual do curso

- $\mathbb{N}$ contém os números naturais.
- $\mathbb{Z}$ contém os inteiros e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q}$ contém os números escritos como p/q , com $q \neq 0$.
- Os racionais possuem decimal finito ou infinito periódico.
- $\mathbb{I}$ contém os decimais infinitos não periódicos.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Raízes quadradas de naturais que não são quadrados perfeitos são irracionais.
- $\sqrt{2}$ surge como diagonal do quadrado unitário e é irracional.
- Cada número real corresponde a um ponto da reta real.

- Para localizar $\sqrt{n}$, comparamos n com quadrados perfeitos e refinamos a aproximação.
- Valores exatos, como $\sqrt{2}$ e π , não devem ser confundidos com aproximações, como 1,41 e 3,14.
- Entre dois reais distintos existem infinitos racionais e infinitos irracionais.

Ideia central

Os números reais formam o universo numérico que permite representar todos os pontos de uma reta e todas as medidas usuais de comprimento. Os irracionais não são exceções ou falhas de cálculo: são uma parte indispensável desse universo.