

Números Reais e Notação Científica

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA04 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Sistema decimal e potências de dez	1
2.1	Valor posicional	1
2.2	Potências de dez	2
3	Definição de notação científica	3
3.1	Unicidade da representação	3
4	Conversão entre forma decimal e científica	4
4.1	Números de módulo maior ou igual a dez	4
4.2	Números de módulo entre zero e um	4
4.3	Da forma científica para a decimal	5
5	Normalização de expressões	5
6	Comparação e ordenação	6
7	Multiplicação e divisão	7
7.1	Multiplicação	7
7.2	Divisão	7
8	Adição e subtração	7
8.1	Expoentes diferentes	8
9	Potências e raízes	9
9.1	Potência inteira	9
9.2	Raízes	9
9.3	Expressões combinadas	9
10	Algarismos significativos e precisão	10

10.1	Valor exato e medida aproximada	10
10.2	Arredondamento	11
10.3	Erro absoluto e relativo	11
11	Regras de precisão em cálculos	11
12	Ordem decimal e ordem de grandeza	12
12.1	Ordem decimal	12
12.2	Ordem de grandeza como potência mais próxima	13
13	Calculadoras e notação computacional	13
14	Prefixos do Sistema Internacional	14
14.1	Conversões de área e volume	14
15	Aplicações em diferentes áreas	15
15.1	Astronomia	15
15.2	Biologia	15
15.3	Química	15
15.4	Tecnologia e armazenamento	15
15.5	Escalas populacionais	16
16	Estratégias de resolução de problemas	16
17	Erros frequentes	17
18	Exercícios de fixação	18
18.1	Conversões e normalização	18
18.2	Comparação e ordenação	18
18.3	Operações	19
18.4	Precisão e ordem de grandeza	19
18.5	Unidades e aplicações	20
19	Questões de aprofundamento	20
20	Avaliação-síntese	21
21	Gabarito comentado	21
21.1	Exercícios de fixação	21

21.2	Questões de aprofundamento	22
21.3	Avaliação-síntese	23
22	Resumo final	24

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

A Matemática precisa representar grandezas de escalas extremamente diferentes. A distância entre planetas pode conter muitos algarismos, enquanto o diâmetro de uma célula ou de uma molécula exige numerosos zeros após a vírgula. A **notação científica** organiza essas representações por meio de potências de dez, facilita comparações e reduz erros de leitura e cálculo.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- interpretar potências de dez com expoentes positivos, zero e negativos;
- reconhecer e produzir representações em notação científica;
- converter números entre as formas decimal e científica;
- justificar a unicidade da representação científica de um número não nulo;
- comparar e ordenar números escritos em notação científica;
- realizar adições, subtrações, multiplicações, divisões e potências;
- trabalhar com arredondamentos, algarismos significativos e erros;
- interpretar ordem decimal e ordem de grandeza;
- ler a notação utilizada por calculadoras e computadores;
- resolver problemas envolvendo números reais muito grandes ou pequenos.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA04**: resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

2 Sistema decimal e potências de dez

2.1 Valor posicional

Nosso sistema de numeração é decimal e posicional. O valor de um algarismo depende de sua posição, associada a uma potência de dez.

Exemplo

O número 53 207,041 pode ser decomposto como

$$53\,207,041 = 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}.$$

Notação

Neste material, a vírgula é o separador decimal. Para separar grupos de três algarismos em números grandes, utilizamos um pequeno espaço:

12 500 000,75.

Assim evitamos confundir separador decimal e separador de milhares.

2.2 Potências de dez

Teorema 2.1: Potências inteiras de dez

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{n \text{ fatores}}$$

e, para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Teorema 2.2: Deslocamento decimal

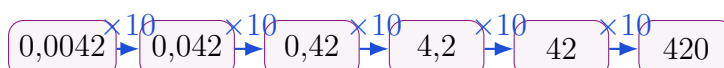
Multiplicar um número por 10^n , com $n > 0$, desloca a vírgula n posições para a direita. Multiplicar por 10^{-n} desloca a vírgula n posições para a esquerda.

Demonstração

Multiplicar por 10 aumenta em uma unidade a ordem posicional de cada algarismo: unidades tornam-se dezenas, décimos tornam-se unidades e assim por diante. Repetir o processo n vezes produz o deslocamento de n posições. Como $10^{-n} = 1/10^n$, multiplicar por 10^{-n} equivale a dividir por 10^n , produzindo o deslocamento contrário.

Exemplo

$$4,73 \cdot 10^3 = 4730, \quad 4,73 \cdot 10^{-3} = 0,00473.$$



3 Definição de notação científica

Definição 3.1: Notação científica

Todo número real não nulo está em **notação científica** quando é escrito na forma

$$x = a \cdot 10^n,$$

em que

$$1 \leq |a| < 10 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

O número a é chamado de **coeficiente** ou **significando**, e n é o **expoente decimal**.

Observação

Algumas fontes chamam a de mantissa. Em contextos científicos modernos, *coeficiente* ou *significando* são termos mais claros. O sinal do número faz parte do coeficiente.

Exemplo

São representações científicas:

$$6,02 \cdot 10^{23}, \quad -3,5 \cdot 10^{-7}, \quad 1 \cdot 10^4.$$

Não estão normalizadas:

$$23,1 \cdot 10^5, \quad 0,42 \cdot 10^{-3},$$

pois os valores absolutos dos coeficientes não pertencem ao intervalo $[1, 10[$.

O número zero

O zero pode ser escrito como $0 \cdot 10^n$ para qualquer inteiro n , mas essa representação não é única e o coeficiente não satisfaz $1 \leq |a| < 10$. Por isso, convencionamos escrever simplesmente

$$0.$$

3.1 Unicidade da representação

Teorema 3.1: Unicidade da notação científica

Todo número real não nulo possui uma única representação científica $a \cdot 10^n$ que satisfaz $1 \leq |a| < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Admita que

$$a \cdot 10^m = b \cdot 10^n,$$

com $1 \leq |a| < 10$ e $1 \leq |b| < 10$. Suponha, sem perda de generalidade, que $m > n$. Dividindo por 10^n ,

$$b = a \cdot 10^{m-n}.$$

Como $m - n \geq 1$ e $|a| \geq 1$, teríamos $|b| \geq 10$, contradizendo $|b| < 10$. Portanto, não

pode ocorrer $m > n$. Pelo mesmo raciocínio, não pode ocorrer $n > m$. Logo, $m = n$ e, consequentemente, $a = b$.

4 Conversão entre forma decimal e científica

4.1 Números de módulo maior ou igual a dez

Para converter um número grande:

1. desloque a vírgula para obter um coeficiente com módulo entre 1 e 10;
2. conte quantas posições a vírgula foi deslocada para a esquerda;
3. use essa quantidade como expoente positivo de 10.

Exemplo resolvido: número grande

$$58\,300\,000 = 5,83 \cdot 10^7.$$

A vírgula, inicialmente após o último zero, foi deslocada sete posições para a esquerda.

4.2 Números de módulo entre zero e um

Para converter um número pequeno:

1. desloque a vírgula para a direita até obter coeficiente com módulo entre 1 e 10;
2. conte o número de posições deslocadas;
3. use o oposto dessa quantidade como expoente de 10.

Exemplo resolvido: número pequeno

$$0,000,000,091 = 9,1 \cdot 10^{-8}.$$

A vírgula foi deslocada oito posições para a direita; por isso, o expoente é -8 .

Direção do deslocamento e sinal do expoente

- número grande: vírgula para a esquerda, expoente positivo;
- número pequeno: vírgula para a direita, expoente negativo.

O sinal não é escolhido por memorização isolada: ele deve fazer a igualdade ser verdadeira.

4.3 Da forma científica para a decimal

Exemplo

$$7,204 \cdot 10^5 = 720\,400,$$

pois a vírgula se desloca cinco posições para a direita.

Exemplo

$$-4,8 \cdot 10^{-6} = -0,000\,0048,$$

pois a vírgula se desloca seis posições para a esquerda.

Algoritmo de conversão

1. localize a posição original da vírgula;
2. produza um coeficiente a tal que $1 \leq |a| < 10$;
3. conte os deslocamentos;
4. associe expoente positivo ao deslocamento para a esquerda e negativo ao deslocamento para a direita;
5. confira o resultado reconstruindo o número decimal.

5 Normalização de expressões

Definição 5.1: Normalização

Normalizar uma expressão $c \cdot 10^k$ significa transformá-la em uma expressão equivalente $a \cdot 10^n$ com $1 \leq |a| < 10$.

Teorema 5.1: Compensação entre coeficiente e expoente

Para todo real c e inteiro k ,

$$(10c) \cdot 10^{k-1} = c \cdot 10^k$$

e

$$\left(\frac{c}{10}\right) \cdot 10^{k+1} = c \cdot 10^k.$$

Demonstração

Pelas propriedades das potências,

$$(10c)10^{k-1} = c10^110^{k-1} = c10^k.$$

Analogamente,

$$\frac{c}{10}10^{k+1} = c10^{-1}10^{k+1} = c10^k.$$

Exemplo

$$37,2 \cdot 10^5 = 3,72 \cdot 10^1 \cdot 10^5 = 3,72 \cdot 10^6.$$

Exemplo

$$0,064 \cdot 10^{-3} = 6,4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 6,4 \cdot 10^{-5}.$$

6 Comparação e ordenação

Teorema 6.1: Comparação de números científicos positivos

Considere $a \cdot 10^m$ e $b \cdot 10^n$, com $1 \leq a, b < 10$.

- Se $m > n$, então $a \cdot 10^m > b \cdot 10^n$.
- Se $m < n$, então $a \cdot 10^m < b \cdot 10^n$.
- Se $m = n$, a comparação depende dos coeficientes a e b .

Demonstração

Se $m > n$, então $m - n \geq 1$. Logo,

$$a10^m = a10^{m-n}10^n \geq 10 \cdot 10^n.$$

Como $b < 10$, temos $b10^n < 10 \cdot 10^n$. Portanto, $a10^m > b10^n$. Os demais casos são análogos.

Exemplo

Compare $7,2 \cdot 10^{-5}$ e $6,8 \cdot 10^{-4}$.

Como $-4 > -5$, o segundo número é maior:

$$7,2 \cdot 10^{-5} < 6,8 \cdot 10^{-4}.$$

Observe que, entre expoentes negativos, -4 é maior que -5 .

Exemplo com números negativos

Para números negativos, compare primeiro os módulos e inverta a ordem:

$$|-3,2 \cdot 10^7| < |-5,1 \cdot 10^7|,$$

portanto

$$-3,2 \cdot 10^7 > -5,1 \cdot 10^7.$$

7 Multiplicação e divisão

7.1 Multiplicação

Teorema 7.1: Produto em notação científica

Para números reais a, b e inteiros m, n ,

$$(a \cdot 10^m)(b \cdot 10^n) = (ab) \cdot 10^{m+n}.$$

Após o cálculo, o coeficiente deve ser normalizado.

Exemplo

$$\begin{aligned}(3,2 \cdot 10^5)(4 \cdot 10^{-3}) &= 12,8 \cdot 10^2 \\ &= 1,28 \cdot 10^3.\end{aligned}$$

7.2 Divisão

Teorema 7.2: Quociente em notação científica

Se $b \neq 0$, então

$$\frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^n} = \frac{a}{b} \cdot 10^{m-n}.$$

O resultado deve ser normalizado.

Exemplo

$$\frac{7,5 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-7}.$$

Exemplo que exige normalização

$$\begin{aligned}\frac{3,6 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{-2}} &= 0,4 \cdot 10^{10} \\ &= 4 \cdot 10^9.\end{aligned}$$

8 Adição e subtração

Teorema 8.1: Soma com expoentes iguais

Se duas parcelas possuem a mesma potência de dez, então

$$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n.$$

Demonstração

Trata-se da propriedade distributiva:

$$a10^n + b10^n = (a + b)10^n.$$

Exemplo

$$2,7 \cdot 10^6 + 4,1 \cdot 10^6 = 6,8 \cdot 10^6.$$

8.1 Expoentes diferentes

Antes de somar ou subtrair, devemos escrever as parcelas com a mesma potência de dez.

Exemplo resolvido: adição

$$3,4 \cdot 10^7 + 6,2 \cdot 10^6.$$

Escolhendo 10^7 como fator comum,

$$6,2 \cdot 10^6 = 0,62 \cdot 10^7.$$

Logo,

$$3,4 \cdot 10^7 + 0,62 \cdot 10^7 = 4,02 \cdot 10^7.$$

Exemplo resolvido: subtração

$$\begin{aligned} 8,1 \cdot 10^{-3} - 2,7 \cdot 10^{-4} &= 8,1 \cdot 10^{-3} - 0,27 \cdot 10^{-3} \\ &= 7,83 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Não some os expoentes em uma adição

É falso escrever

$$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 = 7 \cdot 10^7.$$

Somar expoentes é uma regra de *multiplicação* de potências de mesma base, não de adição. O cálculo correto é

$$0,2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 = 5,2 \cdot 10^4.$$

9 Potências e raízes

9.1 Potência inteira

Teorema 9.1: Potência de um número científico

Para $k \in \mathbb{Z}$ e nos casos em que a expressão esteja definida,

$$(a \cdot 10^n)^k = a^k \cdot 10^{nk}.$$

Exemplo

$$\begin{aligned}(3 \cdot 10^4)^3 &= 3^3 \cdot 10^{12} \\ &= 27 \cdot 10^{12} \\ &= 2,7 \cdot 10^{13}.\end{aligned}$$

Exemplo

$$(2 \cdot 10^{-3})^{-2} = 2^{-2} \cdot 10^6 = \frac{1}{4} \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^5.$$

9.2 Raízes

Quando o expoente de 10 é múltiplo do índice, a raiz é direta:

$$\sqrt[p]{a \cdot 10^{pk}} = \sqrt[p]{a} \cdot 10^k,$$

desde que a expressão seja real.

Exemplo

$$\sqrt{9 \cdot 10^8} = \sqrt{9} \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^4.$$

Exemplo que exige ajuste do expoente

$$\begin{aligned}\sqrt{4,9 \cdot 10^7} &= \sqrt{49 \cdot 10^6} \\ &= 7 \cdot 10^3.\end{aligned}$$

Reescrevemos $4,9 \cdot 10^7$ como $49 \cdot 10^6$ para tornar o expoente par.

9.3 Expressões combinadas

Exemplo resolvido completo

Calcule

$$E = \frac{(6 \cdot 10^5)(4 \cdot 10^{-3})}{8 \cdot 10^2}.$$

No numerador,

$$(6 \cdot 10^5)(4 \cdot 10^{-3}) = 24 \cdot 10^2.$$

Então,

$$E = \frac{24 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^2} = 3 \cdot 10^0 = 3.$$

10 Algarismos significativos e precisão

10.1 Valor exato e medida aproximada

Definição 10.1: Valor exato

Um valor é **exato** quando não resulta de arredondamento ou medição aproximada. Contagens e definições podem ser exatas, como “uma dúzia contém 12 unidades”.

Definição 10.2: Valor aproximado

Um valor é **aproximado** quando representa uma medição ou um número por uma quantidade limitada de algarismos.

Definição 10.3: Algarismos significativos

Os **algarismos significativos** de uma medida são os algarismos que expressam sua precisão: todos os algarismos conhecidos com certeza e o primeiro algarismo estimado.

Regras usuais:

- algarismos diferentes de zero são significativos;
- zeros entre algarismos não nulos são significativos;
- zeros iniciais servem apenas para posicionar a vírgula e não são significativos;
- zeros finais após a vírgula podem indicar precisão e são significativos.

Exemplo

Medida	Notação científica	Algarismos significativos
0,00450	$4,50 \cdot 10^{-3}$	3
30,04	$3,004 \cdot 10^1$	4
7,000	$7,000 \cdot 10^0$	4
0,000081	$8,1 \cdot 10^{-5}$	2

Observação

A escrita científica torna explícita a quantidade de algarismos significativos. Por exemplo, $4 \cdot 10^3$, $4,0 \cdot 10^3$ e $4,00 \cdot 10^3$ representam o mesmo valor central, mas comunicam precisões diferentes.

10.2 Arredondamento

Definição 10.4: Arredondamento

Para arredondar, observamos o primeiro algarismo descartado:

- se for menor que 5, mantemos o último algarismo conservado;
- se for maior ou igual a 5, acrescentamos uma unidade ao último algarismo conservado.

Exemplo

Arredondando $6,37841 \cdot 10^8$:

Quantidade de significativos	Resultado
2	$6,4 \cdot 10^8$
3	$6,38 \cdot 10^8$
4	$6,378 \cdot 10^8$

10.3 Erro absoluto e relativo

Definição 10.5: Erro absoluto

Se x é o valor de referência e a é uma aproximação, o erro absoluto é

$$E_a = |x - a|.$$

Definição 10.6: Erro relativo

Se $x \neq 0$, o erro relativo é

$$E_r = \frac{|x - a|}{|x|}.$$

O erro percentual é $100E_r\%$.

Exemplo

Um comprimento real de 2,00 m foi registrado como 1,98 m. Então

$$E_a = |2,00 - 1,98| = 0,02 \text{ m}$$

e

$$E_r = \frac{0,02}{2,00} = 0,01 = 1\%.$$

11 Regras de precisão em cálculos

As regras abaixo são convenções usadas em cálculos com medidas. Elas evitam que o resultado comunique uma precisão maior que a dos dados.

Teorema 11.1: Precisão em multiplicações e divisões

Em multiplicações e divisões de medidas, o resultado deve ter, em geral, a mesma quantidade de algarismos significativos que o dado menos preciso.

Exemplo

$$(2,4)(3,15) = 7,56.$$

Como 2,4 possui dois algarismos significativos, comunicamos

$$7,6.$$

Teorema 11.2: Precisão em adições e subtrações

Em adições e subtrações de medidas, o resultado deve ter, em geral, a mesma casa decimal que o dado menos preciso.

Exemplo

$$12,4 + 0,037 = 12,437.$$

Como 12,4 foi fornecido apenas até os décimos, comunicamos

$$12,4.$$

Arredonde apenas ao final

Em uma sequência de cálculos, mantenha algarismos adicionais durante as etapas intermediárias e arredonde somente o resultado final. Arredondamentos repetidos podem acumular erro.

12 Ordem decimal e ordem de grandeza

12.1 Ordem decimal

Definição 12.1: Ordem decimal

Se $x \neq 0$ está escrito como $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq |a| < 10$, chamamos n de **ordem decimal** de x . Equivalentemente,

$$10^n \leq |x| < 10^{n+1}.$$

Exemplo

O número $6,4 \cdot 10^7$ possui ordem decimal 7, pois

$$10^7 \leq 6,4 \cdot 10^7 < 10^8.$$

O número $2,1 \cdot 10^{-5}$ possui ordem decimal -5 .

12.2 Ordem de grandeza como potência mais próxima

Definição 12.2: Ordem de grandeza

A **ordem de grandeza** de um número positivo é a potência de dez que mais se aproxima dele em uma escala multiplicativa. Se $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq a < 10$, então

$$\text{OG}(x) = \begin{cases} 10^n, & 1 \leq a < \sqrt{10}, \\ 10^{n+1}, & \sqrt{10} \leq a < 10. \end{cases}$$

Como $\sqrt{10} \approx 3,16$, esse valor funciona como fronteira.

Por que a fronteira é $\sqrt{10}$?

Em uma escala multiplicativa, comparamos os fatores necessários para ir de x até 10^n e até 10^{n+1} . Para $x = a10^n$, esses fatores são a e $10/a$. A fronteira ocorre quando são iguais:

$$a = \frac{10}{a} \implies a^2 = 10 \implies a = \sqrt{10}.$$

Exemplo

$$\text{OG}(2,4 \cdot 10^6) = 10^6,$$

pois $2,4 < 3,16$. Já

$$\text{OG}(7,1 \cdot 10^6) = 10^7.$$

Convenções diferentes

Alguns materiais escolares usam a expressão “ordem de grandeza” apenas para o expoente n da notação científica. Outros usam a potência mais próxima, conforme a definição acima. Por isso, sempre verifique a convenção indicada no problema. Neste curso, distinguimos *ordem decimal* e *ordem de grandeza*.

13 Calculadoras e notação computacional

Calculadoras e computadores frequentemente substituem $\times 10^n$ pela letra E ou por uma indicação como EXP.

Notação

$$6.02\text{E}23 = 6,02 \cdot 10^{23}, \quad 3.5\text{E}-7 = 3,5 \cdot 10^{-7}.$$

Na tela, o ponto costuma desempenhar o papel da vírgula decimal.

Uso da tecla EXP ou EE

Para digitar $4,7 \cdot 10^{-8}$, normalmente utiliza-se a sequência

$$4.7 \quad \text{EXP} \quad (-) \quad 8.$$

Não se deve digitar novamente $\times 10$, pois a tecla já representa essa parte.

Observação

Uma calculadora exibe apenas uma quantidade finita de algarismos. Quando o valor exato possui mais algarismos, a tela mostra uma aproximação. O usuário deve interpretar a precisão dos dados e não copiar indiscriminadamente todos os dígitos exibidos.

14 Prefixos do Sistema Internacional

Prefixos permitem substituir potências de dez por nomes e símbolos padronizados.

Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo	Fator
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^9	micro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
quilo	k	10^3	pico	p	10^{-12}

Exemplo

$$3,5 \text{ km} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ m},$$
$$8 \mu\text{m} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad 12 \text{ ns} = 12 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Maiúsculas e minúsculas importam

O símbolo m representa metro quando usado como unidade e o prefixo mili quando antecede outra unidade. O símbolo M representa o prefixo mega. Assim, mm e Mm não são equivalentes:

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}, \quad 1 \text{ Mm} = 10^6 \text{ m}.$$

14.1 Conversões de área e volume

Ao elevar uma unidade a uma potência, o fator de conversão também deve ser elevado.

Exemplo

Como $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$,

$$1 \text{ cm}^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

e

$$1 \text{ cm}^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3.$$

15 Aplicações em diferentes áreas

15.1 Astronomia

Tempo de propagação da luz

A distância média da Terra ao Sol é aproximadamente $1,496 \cdot 10^{11}$ m e a velocidade da luz é aproximadamente $3,00 \cdot 10^8$ m/s. O tempo é

$$\begin{aligned}t &= \frac{1,496 \cdot 10^{11}}{3,00 \cdot 10^8} \\&\approx 0,4987 \cdot 10^3 \\&= 4,987 \cdot 10^2 \text{ s.}\end{aligned}$$

Assim, $t \approx 499$ s, ou aproximadamente 8,31 minutos.

15.2 Biologia

Exemplo

Um vírus possui diâmetro aproximado de $1,2 \cdot 10^{-7}$ m. Se 10^6 vírus fossem alinhados sem espaços, o comprimento seria

$$(10^6)(1,2 \cdot 10^{-7}) = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0,12 \text{ m.}$$

15.3 Química

Exemplo

Uma amostra contém $3,0 \cdot 10^{22}$ partículas, cada uma com massa média de $5,2 \cdot 10^{-26}$ kg. A massa total é

$$\begin{aligned}m &= (3,0 \cdot 10^{22})(5,2 \cdot 10^{-26}) \\&= 15,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \\&= 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ kg.}\end{aligned}$$

15.4 Tecnologia e armazenamento

Exemplo

Um arquivo possui $2,4 \cdot 10^9$ bytes. Se cada bloco armazena $8 \cdot 10^6$ bytes, o número de blocos necessários é

$$\frac{2,4 \cdot 10^9}{8 \cdot 10^6} = 0,3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^2 = 300.$$

15.5 Escalas populacionais

Exemplo

Uma região possui $4,8 \cdot 10^7$ habitantes distribuídos em $1,2 \cdot 10^6 \text{ km}^2$. A densidade média é

$$\frac{4,8 \cdot 10^7}{1,2 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^1 = 40 \text{ hab./km}^2.$$

Atividade investigativa: escalas do Universo

Pesquise uma medida representativa de cada escala: planeta, ser humano, célula, bactéria, vírus, molécula e átomo. Converta todas para metros e escreva-as em notação científica. Depois:

1. ordene as medidas;
2. calcule quantas ordens decimais separam as maiores e menores;
3. construa uma reta logarítmica em que cada intervalo represente uma potência de dez;
4. registre as fontes e a precisão de cada medida.

16 Estratégias de resolução de problemas

Roteiro geral

1. identifique as grandezas, unidades e o que deve ser calculado;
2. converta as unidades para um sistema comum;
3. escreva os dados em notação científica;
4. escolha a operação adequada;
5. opere separadamente coeficientes e potências de dez;
6. normalize o resultado;
7. aplique o arredondamento apenas no final;
8. verifique unidade, sinal, escala e coerência do resultado.

Problema integrado

Uma sonda transmite $3,6 \cdot 10^7$ bits por segundo durante $2,5 \cdot 10^3$ segundos. Quantos bits são transmitidos?

$$\begin{aligned} N &= (3,6 \cdot 10^7)(2,5 \cdot 10^3) \\ &= 9,0 \cdot 10^{10} \text{ bits.} \end{aligned}$$

Se 8 bits formam 1 byte,

$$\frac{9,0 \cdot 10^{10}}{8} = 1,125 \cdot 10^{10} \text{ bytes.}$$

Com dois algarismos significativos, isso corresponde a $1,1 \cdot 10^{10}$ bytes.

17 Erros frequentes

Erro 1: coeficiente fora do intervalo

$42,5 \cdot 10^6$ não está normalizado. O correto é

$$4,25 \cdot 10^7.$$

Erro 2: sinal incorreto do expoente

O número 0,00032 é pequeno; portanto,

$$0,00032 = 3,2 \cdot 10^{-4},$$

e não $3,2 \cdot 10^4$.

Erro 3: contar zeros em vez de deslocamentos

Conte as posições percorridas pela vírgula, incluindo posições ocupadas por algarismos. Em $520\,000 = 5,2 \cdot 10^5$, o expoente é 5, embora apareçam apenas quatro zeros na escrita decimal.

Erro 4: somar expoentes na adição

Para somar, iguale as potências de dez. A soma dos expoentes pertence ao produto:

$$10^m 10^n = 10^{m+n}.$$

Erro 5: esquecer a normalização final

$$(6 \cdot 10^4)(5 \cdot 10^3) = 30 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^8.$$

O resultado intermediário está correto, mas ainda não está em notação científica.

Erro 6: ignorar as unidades

Não se somam diretamente 3 km e 500 m sem conversão. Uma forma correta é

$$3 \cdot 10^3 \text{ m} + 5 \cdot 10^2 \text{ m} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

Erro 7: arredondar cedo demais

Arredondar resultados intermediários pode alterar o resultado final. Conserve casas adicionais durante os cálculos e arredonde apenas ao comunicar a resposta.

18 Exercícios de fixação

18.1 Conversões e normalização

1. Escreva em notação científica:

- | | |
|--------------------|------------------|
| a) 45 000; | e) $-302\,000$; |
| b) 7 230 000; | f) $-0,00094$; |
| c) 0,0081; | g) 1; |
| d) 0,000, 000, 56; | h) 98,7. |

2. Escreva na forma decimal:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $3,7 \cdot 10^5$; | d) $9,05 \cdot 10^{-7}$; |
| b) $1,02 \cdot 10^8$; | e) $-2,1 \cdot 10^4$; |
| c) $6,4 \cdot 10^{-3}$; | f) $-7 \cdot 10^{-5}$. |

3. Normalize:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $34 \cdot 10^5$; | d) $0,003 \cdot 10^{12}$; |
| b) $0,82 \cdot 10^7$; | e) $-47 \cdot 10^{-8}$; |
| c) $125,6 \cdot 10^{-4}$; | f) $-0,091 \cdot 10^3$. |

4. Explique por que $25 \cdot 10^4$ e $2,5 \cdot 10^5$ representam o mesmo número, mas apenas a segunda expressão está em notação científica.

18.2 Comparação e ordenação

5. Complete com $<$, $>$ ou $=$:

- | | |
|---|---|
| a) $3 \cdot 10^7$ ____ $9 \cdot 10^6$; | c) $-4 \cdot 10^8$ ____ $-7 \cdot 10^8$; |
| b) $5,2 \cdot 10^{-4}$ ____ $8 \cdot 10^{-5}$; | d) $6,1 \cdot 10^{-6}$ ____ 0,0000061. |

6. Coloque em ordem crescente:

$$2,9 \cdot 10^{-3}, \quad 4 \cdot 10^{-4}, \quad 1,2 \cdot 10^{-2}, \quad 7 \cdot 10^{-3}.$$

7. Determine a ordem decimal:

$$4,8 \cdot 10^9, \quad 1,1 \cdot 10^{-7}, \quad 9800, \quad 0,0032.$$

18.3 Operações

8. Calcule e normalize:

a) $(2 \cdot 10^3)(4 \cdot 10^5)$;

b) $(7,5 \cdot 10^{-2})(2 \cdot 10^{-6})$;

c) $\frac{9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^2}$;

d) $\frac{4,2 \cdot 10^{-5}}{7 \cdot 10^3}$;

e) $(5 \cdot 10^{-4})^2$;

f) $(2 \cdot 10^3)^{-2}$.

9. Calcule e normalize:

a) $3,2 \cdot 10^6 + 4,5 \cdot 10^6$;

b) $7,1 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4$;

c) $9,3 \cdot 10^{-3} - 2,8 \cdot 10^{-4}$;

d) $5 \cdot 10^8 - 7,5 \cdot 10^7$;

e) $4,2 \cdot 10^{-6} + 9 \cdot 10^{-8}$;

f) $1,0 \cdot 10^4 - 9,99 \cdot 10^3$.

10. Calcule:

$$\frac{(3 \cdot 10^4)(8 \cdot 10^{-7})}{6 \cdot 10^{-2}}.$$

11. Calcule as raízes exatas:

a) $\sqrt{16 \cdot 10^{12}}$;

b) $\sqrt{2,5 \cdot 10^7}$;

c) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-15}}$;

d) $\sqrt[4]{81 \cdot 10^{20}}$.

18.4 Precisão e ordem de grandeza

12. Indique a quantidade de algarismos significativos:

$$0,00450, \quad 700,2, \quad 8,00, \quad 0,00009, \quad 1,0300.$$

13. Arredonde $7,38642 \cdot 10^{-9}$ para:

a) dois algarismos significativos;

b) três algarismos significativos;

c) quatro algarismos significativos.

14. Determine a ordem de grandeza, usando a potência de dez mais próxima:

$$2,1 \cdot 10^5, \quad 3,5 \cdot 10^5, \quad 8 \cdot 10^{-4}, \quad 1,4 \cdot 10^{-8}.$$

15. Um valor real é $5,00 \cdot 10^3$ e foi aproximado por $4,92 \cdot 10^3$. Calcule o erro absoluto, relativo e percentual.

18.5 Unidades e aplicações

16. Converta para metros:

$$5 \text{ km}, \quad 32 \text{ mm}, \quad 7,5 \mu\text{m}, \quad 12 \text{ nm}.$$

17. Converta:

a) 3 cm^2 para m^2 ;

b) 8 cm^3 para m^3 ;

c) $2,5 \text{ km}^2$ para m^2 .

18. Uma espaçonave percorre $7,2 \cdot 10^8 \text{ m}$ em $2,4 \cdot 10^3 \text{ s}$. Determine sua velocidade média.

19. Uma célula possui massa de $6 \cdot 10^{-12} \text{ g}$. Qual é a massa de $2,5 \cdot 10^8$ células?

20. Uma rede transmite $1,2 \cdot 10^8$ bits por segundo. Quantos bits são transmitidos em $3,0 \cdot 10^2$ segundos?

21. A espessura de uma folha é $9,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Qual será a altura de uma pilha com $2,0 \cdot 10^4$ folhas?

22. A massa da Terra é aproximadamente $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e a massa da Lua é $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Aproximadamente quantas vezes a massa da Terra é maior que a da Lua?

19 Questões de aprofundamento

A1. Demonstre que não existem duas representações científicas normalizadas diferentes para o mesmo número não nulo.

A2. Se $x = a \cdot 10^m$ e $y = b \cdot 10^n$, com $a, b > 0$ e $m > n$, prove que $x > y$.

A3. Sem converter integralmente para decimal, calcule

$$\frac{6,4 \cdot 10^{12} + 8 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 10^6}.$$

A4. Determine n para que

$$(2 \cdot 10^n)(5 \cdot 10^{-3}) = 10^8.$$

A5. Um número positivo tem ordem decimal -6 . Entre quais potências de dez ele está? Dê três exemplos.

A6. Explique por que a fronteira da ordem de grandeza é $\sqrt{10}$, e não 5.

A7. Uma aproximação tem erro relativo $2 \cdot 10^{-3}$. Expresse o erro em porcentagem e interprete-o.

A8. Mostre que a área de um quadrado de lado $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ é $9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$.

A9. Uma estimativa populacional é $8,10 \cdot 10^9$, com três algarismos significativos. Determine um intervalo de valores que seriam arredondados para essa estimativa.

A10. Compare as aproximações 3,14 e 3,1416 para π , calculando o erro absoluto de cada uma com $\pi \approx 3,14159265$.

20 Avaliação-síntese

1. Defina notação científica e indique as condições do coeficiente e do expoente.
2. Converta 0,000, 000, 703 para notação científica.
3. Escreva $-6,25 \cdot 10^7$ na forma decimal.
4. Normalize $0,047 \cdot 10^{12}$.
5. Calcule:

$$\frac{(4 \cdot 10^{-5})(3 \cdot 10^8)}{6 \cdot 10^2}.$$

6. Calcule:

$$5,4 \cdot 10^6 + 7,5 \cdot 10^5.$$

7. Arredonde $2,9786 \cdot 10^{-4}$ para três algarismos significativos.
8. Determine a ordem decimal e a ordem de grandeza de $6,2 \cdot 10^{-9}$.
9. Converta 45 nm para metros.
10. Uma partícula viaja a $2,5 \cdot 10^6$ m/s durante $4 \cdot 10^{-3}$ s. Qual distância percorre?

21 Gabarito comentado

21.1 Exercícios de fixação

1. a) $4,5 \cdot 10^4$; b) $7,23 \cdot 10^6$; c) $8,1 \cdot 10^{-3}$; d) $5,6 \cdot 10^{-7}$; e) $-3,02 \cdot 10^5$; f) $-9,4 \cdot 10^{-4}$; g) $1 \cdot 10^0$; h) $9,87 \cdot 10^1$.
2. a) 370 000; b) 102 000 000; c) 0,0064; d) 0,000, 000, 905; e) $-21\,000$; f) $-0,00007$.
3. a) $3,4 \cdot 10^6$; b) $8,2 \cdot 10^6$; c) $1,256 \cdot 10^{-2}$; d) $3 \cdot 10^9$; e) $-4,7 \cdot 10^{-7}$; f) $-9,1 \cdot 10^1$.
4. Como $25 = 2,5 \cdot 10$, temos $25 \cdot 10^4 = 2,5 \cdot 10^5$. Apenas a segunda possui coeficiente com módulo entre 1 e 10.
5. a) $>$; b) $>$; c) $>$; d) $=$.

- 6.

$$4 \cdot 10^{-4} < 2,9 \cdot 10^{-3} < 7 \cdot 10^{-3} < 1,2 \cdot 10^{-2}.$$

7. As ordens decimais são, respectivamente,

$$9, \quad -7, \quad 3, \quad -3.$$

8. a) $8 \cdot 10^8$; b) $1,5 \cdot 10^{-7}$; c) $3 \cdot 10^6$; d) $6 \cdot 10^{-9}$; e) $2,5 \cdot 10^{-7}$; f) $2,5 \cdot 10^{-7}$.
9. a) $7,7 \cdot 10^6$; b) $7,9 \cdot 10^5$; c) $9,02 \cdot 10^{-3}$; d) $4,25 \cdot 10^8$; e) $4,29 \cdot 10^{-6}$; f) $1 \cdot 10^1 = 10$.

- 10.

$$\frac{(3 \cdot 10^4)(8 \cdot 10^{-7})}{6 \cdot 10^{-2}} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-1}.$$

11. a) $4 \cdot 10^6$; b) $5 \cdot 10^3$; c) $2 \cdot 10^{-5}$; d) $3 \cdot 10^5$.

12. As quantidades são 3, 4, 3, 1 e 5, respectivamente.

13. a) $7,4 \cdot 10^{-9}$; b) $7,39 \cdot 10^{-9}$; c) $7,386 \cdot 10^{-9}$.

14.

$$10^5, \quad 10^6, \quad 10^{-3}, \quad 10^{-8}.$$

No segundo caso, $3,5 > \sqrt{10}$; no terceiro, $8 > \sqrt{10}$.

15.

$$E_a = \left| 5,00 \cdot 10^3 - 4,92 \cdot 10^3 \right| = 8,0 \cdot 10^1,$$

$$E_r = \frac{80}{5000} = 1,6 \cdot 10^{-2} = 0,016,$$

portanto o erro percentual é 1,6%.

16.

$$5 \cdot 10^3 \text{ m}, \quad 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

17. a) $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; b) $8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$; c) $2,5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

18.

$$v = \frac{7,2 \cdot 10^8}{2,4 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

19.

$$(6 \cdot 10^{-12})(2,5 \cdot 10^8) = 15 \cdot 10^{-4} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ g}.$$

20.

$$(1,2 \cdot 10^8)(3,0 \cdot 10^2) = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ bits}.$$

21.

$$(9,0 \cdot 10^{-5})(2,0 \cdot 10^4) = 18 \cdot 10^{-1} = 1,8 \text{ m}.$$

22.

$$\frac{5,97 \cdot 10^{24}}{7,35 \cdot 10^{22}} \approx 0,812 \cdot 10^2 = 8,12 \cdot 10^1.$$

A Terra tem aproximadamente 81,2 vezes a massa da Lua.

21.2 Questões de aprofundamento

A1. A demonstração é a apresentada no Teorema 3.1: se os expoentes fossem diferentes, um dos coeficientes teria módulo pelo menos 10, contradizendo a normalização.

A2. Como $m - n \geq 1$, $a10^m = a10^{m-n}10^n \geq 10 \cdot 10^n > b10^n$, pois $b < 10$.

A3.

$$\begin{aligned} \frac{6,4 \cdot 10^{12} + 8 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 10^6} &= \frac{(6,4 + 0,8) \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^6} \\ &= \frac{7,2}{4} \cdot 10^6 \\ &= 1,8 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

A4.

$$(2 \cdot 10^n)(5 \cdot 10^{-3}) = 10 \cdot 10^{n-3} = 10^{n-2}.$$

Portanto, $n - 2 = 8$ e $n = 10$.

A5. Está entre 10^{-6} e 10^{-5} . Exemplos: $1,2 \cdot 10^{-6}$, $5 \cdot 10^{-6}$ e $9,9 \cdot 10^{-6}$.

A6. A escala é multiplicativa. A fronteira iguala os fatores a e $10/a$, levando a $a^2 = 10$ e $a = \sqrt{10}$.

A7.

$$100(2 \cdot 10^{-3})\% = 2 \cdot 10^{-1}\% = 0,2\%.$$

O erro corresponde a duas partes em mil do valor de referência.

A8.

$$(3 \cdot 10^{-4})^2 = 9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2.$$

A9. O último algarismo significativo está em 10^7 . Metade dessa unidade é $0,5 \cdot 10^7$. Assim, o intervalo de arredondamento é

$$[8,095 \cdot 10^9, 8,105 \cdot 10^9[.$$

A10.

$$|\pi - 3,14| \approx 1,59265 \cdot 10^{-3},$$

$$|\pi - 3,1416| \approx 7,35 \cdot 10^{-6}.$$

A segunda aproximação possui erro muito menor.

21.3 Avaliação-síntese

1. É a forma $a \cdot 10^n$, com $1 \leq |a| < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$, para um número real não nulo.

2.

$$0,000,000,703 = 7,03 \cdot 10^{-7}.$$

3.

$$-6,25 \cdot 10^7 = -62\,500\,000.$$

4.

$$0,047 \cdot 10^{12} = 4,7 \cdot 10^{10}.$$

5.

$$\frac{(4 \cdot 10^{-5})(3 \cdot 10^8)}{6 \cdot 10^2} = \frac{12 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^1.$$

6.

$$5,4 \cdot 10^6 + 0,75 \cdot 10^6 = 6,15 \cdot 10^6.$$

7.

$$2,9786 \cdot 10^{-4} \approx 2,98 \cdot 10^{-4}.$$

8. A ordem decimal é -9 . Como $6,2 > \sqrt{10}$, a ordem de grandeza é 10^{-8} .

9.

$$45 \text{ nm} = 45 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

10.

$$d = (2,5 \cdot 10^6)(4 \cdot 10^{-3}) = 10 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^4 \text{ m}.$$

22 Resumo final

Mapa conceitual

- Um número científico não nulo tem a forma $a \cdot 10^n$, com $1 \leq |a| < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- O expoente positivo representa deslocamento decimal para a direita na reconstrução; o negativo representa deslocamento para a esquerda.
- A representação científica normalizada de um número não nulo é única.
- Na multiplicação, multiplicamos coeficientes e somamos expoentes.
- Na divisão, dividimos coeficientes e subtraímos expoentes.
- Na adição e subtração, igualamos primeiro as potências de dez.
- Todo resultado deve ser normalizado ao final.
- Algarismos significativos comunicam a precisão de uma medida.
- O erro absoluto mede a diferença; o relativo compara essa diferença com o tamanho do valor de referência.
- A ordem decimal é o expoente da forma científica.
- A ordem de grandeza é a potência de dez multiplicativamente mais próxima.
- Unidades, sinais, precisão e coerência física fazem parte da resposta.

Ideia central

A notação científica não altera o valor de um número: ela revela sua escala, organiza seus algarismos e torna possíveis cálculos confiáveis com grandezas muito grandes ou muito pequenas.