

Porcentagens Sucessivas e Educação Financeira

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA05 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Fundamentos da porcentagem	2
2.1	Razões de denominador cem	2
2.2	Base, parte e taxa	3
3	Variação absoluta e variação percentual	4
4	Fatores de aumento e de redução	5
4.1	Valor original e porcentagem inversa	6
5	Percentuais sucessivos	7
5.1	Aumentar e reduzir pela mesma porcentagem	9
6	Porcentagem e pontos percentuais	10
7	Descontos, acréscimos e formação de preços	11
7.1	Preço, desconto e acréscimo	11
7.2	Desconto anunciado e desconto efetivo	11
7.3	Aumento sobre o custo e margem sobre a venda	12
8	Orçamento pessoal e familiar	12
9	Inflação, reajuste e poder de compra	13
10	Juros simples	15
11	Juros compostos	16
11.1	Comparação entre os regimes	17
12	Modelagem de compras, parcelas e crédito	18

13 Comparação de propostas e tomada de decisão	19
13.1 Critérios quantitativos e qualitativos	19
13.2 Desconto à vista e percentual sobre o preço a prazo	19
14 Tecnologias digitais: calculadora e planilha	20
14.1 Uso consciente da calculadora	20
14.2 Modelo de planilha	20
14.3 Fórmulas úteis	21
14.4 Tabela de evolução temporal	21
15 Estratégias para resolver e elaborar problemas	22
15.1 Roteiro de resolução	22
15.2 Como elaborar um bom problema	22
15.3 Estimativas para conferência	23
16 Erros frequentes e como evitá-los	23
17 Lista de exercícios	24
17.1 Porcentagem, parte, base e taxa	24
17.2 Aumentos, reduções e valor original	25
17.3 Percentuais sucessivos	25
17.4 Educação financeira	26
17.5 Tecnologia, análise e elaboração	26
18 Questões de aprofundamento	27
19 Avaliação-síntese	27
20 Gabarito comentado	28
20.1 Exercícios 1 a 10	28
20.2 Exercícios 11 a 20	29
20.3 Exercícios 21 a 30	30
20.4 Exercícios 31 a 42	31
20.5 Exercícios 43 a 50	33
20.6 Questões de aprofundamento	34
20.7 Avaliação-síntese	34
21 Resumo final	36

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

A porcentagem permite comparar partes de um todo, descrever variações e tomar decisões em situações de consumo, renda, orçamento, poupança, inflação e crédito. Entretanto, o símbolo de porcentagem não substitui o raciocínio: é indispensável identificar *qual é a base de comparação*, distinguir variação absoluta de variação relativa e compreender que percentuais sucessivos atuam sobre valores geralmente diferentes.

Ao concluir este curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- relacionar porcentagens, frações, razões e números decimais;
- calcular a parte, a taxa percentual ou o valor de referência;
- interpretar porcentagem como operador multiplicativo;
- calcular aumentos, descontos e percentuais sucessivos;
- determinar a taxa única equivalente a diversas variações;
- diferenciar porcentagem de ponto percentual;
- resolver problemas de orçamento, consumo, inflação e poder de compra;
- modelar juros simples e compostos em situações introdutórias;
- comparar propostas financeiras por meio de critérios explícitos;
- utilizar calculadoras e planilhas para organizar cálculos e testar cenários;
- elaborar problemas coerentes e justificar as estratégias utilizadas.

Correspondência com a BNCC

Este curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA05**: resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Finalidade educacional

Os exemplos financeiros deste material têm finalidade matemática e educativa. Não constituem indicação de investimento, empréstimo ou compra. Em uma decisão real, também devem ser considerados prazo, risco, liquidez, tarifas, impostos, contratos e necessidades pessoais.

2 Fundamentos da porcentagem

2.1 Razões de denominador cem

Definição 2.1: Porcentagem

Uma porcentagem é uma razão cujo denominador é 100. Para todo número real p , define-se

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

O símbolo % significa *por cento* ou *a cada cem*.

Exemplo

$$37\% = \frac{37}{100} = 0,37, \quad 2,5\% = \frac{2,5}{100} = 0,025, \quad 125\% = \frac{125}{100} = 1,25.$$

Uma taxa percentual pode ser menor que 0%, igual a 0%, entre 0% e 100%, igual a 100% ou maior que 100%, conforme o contexto.

Teorema 2.1: Conversão entre as representações

Se $p \in \mathbb{R}$, então:

$$p\% = \frac{p}{100} = 0,01p.$$

Reciprocamente, um número decimal r corresponde à porcentagem

$$r = 100r\%.$$

Demonstração

Pela definição, dividir p por 100 desloca a vírgula duas posições para a esquerda, logo $p/100 = 0,01p$. No sentido inverso, se $r = p/100$, então $p = 100r$; portanto, $r = 100r\%$.

Fração	Número decimal	Porcentagem
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{3}{5}$	0,6	60%
$\frac{1}{20}$	0,05	5%
$\frac{9}{8}$	1,125	112,5%

2.2 Base, parte e taxa

Definição 2.2: Elementos de um cálculo percentual

Em uma relação percentual, distinguimos:

- **base** ou valor de referência, indicada por B ;
- **parte percentual**, indicada por P ;
- **taxa percentual**, indicada por $p\%$;
- **taxa unitária**, indicada por $r = p/100$.

A relação fundamental é

$$P = rB = \frac{p}{100}B.$$

Teorema 2.2: Três problemas fundamentais

Sendo $B \neq 0$ e $r = p/100$, valem:

$$P = rB, \quad r = \frac{P}{B}, \quad B = \frac{P}{r} \quad (r \neq 0).$$

Em termos percentuais,

$$p = 100 \cdot \frac{P}{B}.$$

Demonstração

A primeira igualdade é a definição de parte percentual. Dividindo ambos os membros de $P = rB$ por $B \neq 0$, obtemos $r = P/B$. Se $r \neq 0$, a divisão por r fornece $B = P/r$. Como $p = 100r$, segue que $p = 100P/B$.

Exemplo: calcular a parte

Uma turma tem 40 estudantes, dos quais 35% participam de uma atividade. Como $r = 0,35$,

$$P = 0,35 \cdot 40 = 14.$$

Logo, 14 estudantes participam.

Exemplo: determinar a taxa

Em um total de 250 peças, 15 apresentaram defeito. A taxa é

$$p = 100 \cdot \frac{15}{250} = 6.$$

Portanto, 6% das peças apresentaram defeito.

Exemplo: recuperar a base

Se R\$ 72,00 representam 30% de um valor, então

$$B = \frac{72}{0,30} = 240.$$

O valor de referência é R\$ 240,00.

A base precisa ser identificada

A afirmação de que a diferença é 20% é incompleta sem uma base. Por exemplo, 20 representa 20% de 100, mas representa 10% de 200. Toda porcentagem é relativa a algum valor de referência.

3 Variação absoluta e variação percentual

Definição 3.1: Variação absoluta

Dados um valor inicial V_i e um valor final V_f , a variação absoluta é

$$\Delta V = V_f - V_i.$$

Ela é positiva em um aumento, negativa em uma redução e nula quando não ocorre alteração.

Definição 3.2: Variação relativa e taxa percentual

Se $V_i \neq 0$, a variação relativa, tomando o valor inicial como base, é

$$r = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

A correspondente taxa de variação percentual é

$$p = 100r = 100 \cdot \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

Exemplo

Um preço passa de R\$ 80,00 para R\$ 92,00. A variação absoluta é

$$\Delta V = 92 - 80 = 12,$$

e a taxa percentual é

$$p = 100 \cdot \frac{12}{80} = 15.$$

Houve aumento de R\$ 12,00, correspondente a 15% do preço inicial.

Observação

Grandezas de tamanhos diferentes podem ter a mesma variação absoluta e taxas percentuais diferentes. Um aumento de R\$ 10,00 sobre R\$ 50,00 é de 20%; sobre R\$ 200,00, é de apenas 5%.

Teorema 3.1: Reconstrução do valor final

Se r é a variação relativa de V_i para V_f , então

$$V_f = V_i(1 + r).$$

Demonstração

Da definição,

$$r = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

Multiplicando por V_i , resulta $rV_i = V_f - V_i$. Somando V_i aos dois membros,

$$V_f = V_i + rV_i = V_i(1 + r).$$

4 Fatores de aumento e de redução

Definição 4.1: Fator multiplicativo

O número que multiplica o valor inicial para produzir o valor final é chamado **fator multiplicativo**. Em uma variação de taxa unitária r , o fator é

$$F = 1 + r.$$

Teorema 4.1: Aumento percentual

Após um aumento de $p\%$, um valor inicial V torna-se

$$V' = V \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

O fator de aumento é $1 + p/100$.

Demonstração

O aumento corresponde a $(p/100)V$. Assim,

$$V' = V + \frac{p}{100}V = V \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Teorema 4.2: Redução percentual

Após uma redução de $p\%$, com $0 \leq p \leq 100$, um valor inicial V torna-se

$$V' = V \left(1 - \frac{p}{100} \right).$$

O fator de redução é $1 - p/100$.

Demonstração

A redução corresponde a $(p/100)V$. Subtraindo-a do valor inicial,

$$V' = V - \frac{p}{100}V = V \left(1 - \frac{p}{100} \right).$$

Transformação	Taxa unitária	Fator
Aumento de 8%	+0,08	1,08
Redução de 8%	-0,08	0,92
Aumento de 100%	+1	2
Redução de 100%	-1	0

Exemplo

Um produto de R\$ 350,00 recebe desconto de 18%. Seu fator é $1 - 0,18 = 0,82$. Portanto,

$$350 \cdot 0,82 = 287.$$

O preço após o desconto é R\$ 287,00.

Leitura inversa do fator

Um fator $F > 1$ representa aumento de $(F - 1) \cdot 100\%$. Um fator $0 \leq F < 1$ representa redução de $(1 - F) \cdot 100\%$. Assim, 1,24 indica aumento de 24%, enquanto 0,73 indica redução de 27%.

4.1 Valor original e porcentagem inversa

Teorema 4.3: Recuperação do valor original

Se $V_f = FV_i$, com $F \neq 0$, então

$$V_i = \frac{V_f}{F}.$$

Exemplo

Após desconto de 20%, um produto custa R\$ 144,00. Como o fator foi 0,80, o preço

original era

$$\frac{144}{0,80} = 180.$$

Não se deve somar 20% de 144, pois o desconto foi calculado sobre outra base.

5 Percentuais sucessivos

Definição 5.1: Variações percentuais sucessivas

Variações são **sucessivas** quando cada nova taxa atua sobre o valor resultante da etapa anterior.

Teorema 5.1: Produto dos fatores sucessivos

Se um valor V_0 sofre, sucessivamente, variações de taxas unitárias $r_1, r_2, \dots, r_n$, então

$$V_n = V_0 \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Demonstração

Na primeira etapa, $V_1 = V_0(1 + r_1)$. Na segunda,

$$V_2 = V_1(1 + r_2) = V_0(1 + r_1)(1 + r_2).$$

Repetindo o mesmo raciocínio até a etapa n , obtemos

$$V_n = V_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n).$$

Dois aumentos

Um valor de R\$ 500,00 aumenta 10% e, depois, 20%:

$$V_f = 500 \cdot 1,10 \cdot 1,20 = 660.$$

A variação total foi de R\$ 160,00, isto é,

$$\frac{160}{500} = 0,32 = 32\%.$$

Os percentuais não produzem 30%, pois o segundo aumento incide sobre R\$ 550,00, não sobre R\$ 500,00.

Desconto seguido de aumento

Um preço recebe desconto de 10% e depois aumento de 8%. O fator total é

$$0,90 \cdot 1,08 = 0,972.$$

O valor final corresponde a 97,2% do inicial; portanto, a variação equivalente é uma redução de 2,8%.

Teorema 5.2: Taxa equivalente

Para variações sucessivas de taxas unitárias $r_1, \dots, r_n$, a taxa unitária equivalente r_{eq} é determinada por

$$1 + r_{\text{eq}} = \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Logo,

$$r_{\text{eq}} = \prod_{k=1}^n (1 + r_k) - 1.$$

Demonstração

Uma única variação equivalente deve levar V_0 ao mesmo resultado:

$$V_n = V_0(1 + r_{\text{eq}}).$$

Pelo teorema anterior,

$$V_n = V_0 \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Para $V_0 \neq 0$, a igualdade entre os resultados implica

$$1 + r_{\text{eq}} = \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Teorema 5.3: Composição de duas taxas

Para duas variações sucessivas de taxas unitárias r e s ,

$$r_{\text{eq}} = r + s + rs.$$

Demonstração

$$1 + r_{\text{eq}} = (1 + r)(1 + s) = 1 + r + s + rs.$$

Subtraindo 1 dos dois membros, resulta $r_{\text{eq}} = r + s + rs$.

Observação

Se as duas variações são aumentos, $rs > 0$ e a taxa equivalente é maior que a soma $r + s$. Se uma é aumento e outra é redução, $rs < 0$, e o produto corrige a soma algébrica. A simples soma somente é exata quando pelo menos uma das taxas é zero ou quando todas as partes são calculadas diretamente sobre a mesma base.

5.1 Aumentar e reduzir pela mesma porcentagem

Teorema 5.4: Variações opostas de mesma taxa

Se um valor positivo aumenta $p\%$ e depois diminui $p\%$, com $0 < p < 100$, o resultado é menor que o valor inicial. A redução equivalente é

$$\frac{p^2}{100}\%.$$

Demonstração

O fator total é

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2.$$

Logo, a redução unitária é $p^2/10\,000$. Multiplicando por 100 para expressá-la em porcentagem, obtemos $p^2/100\%$.

Exemplo

Um aumento de 20% seguido de redução de 20% tem fator

$$1,20 \cdot 0,80 = 0,96.$$

Portanto, produz redução total de 4%, pois $20^2/100 = 4$.

Teorema 5.5: Taxa necessária para retornar ao valor inicial

a) Após um aumento de $p\%$, a redução necessária para retornar ao valor inicial é

$$\frac{100p}{100 + p}\%.$$

b) Após uma redução de $p\%$, com $0 < p < 100$, o aumento necessário para retornar ao valor inicial é

$$\frac{100p}{100 - p}\%.$$

Demonstração

No primeiro caso, se q é a taxa percentual de redução procurada,

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right) = 1.$$

Logo,

$$1 - \frac{q}{100} = \frac{100}{100 + p} \implies q = \frac{100p}{100 + p}.$$

No segundo caso, se q é a taxa de aumento,

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{q}{100}\right) = 1,$$

de onde

$$1 + \frac{q}{100} = \frac{100}{100 - p} \implies q = \frac{100p}{100 - p}.$$

Exemplo

Depois de uma redução de 20%, o fator é 0,80. Para voltar ao valor inicial, o novo valor precisa ser multiplicado por $1/0,80 = 1,25$: é necessário aumento de 25%, e não de 20%.

A ordem dos fatores

Como a multiplicação de números reais é comutativa, a ordem de fatores percentuais fixos não altera o produto final. Contudo, em situações reais, as taxas podem depender do saldo, do prazo, de limites ou de regras diferentes; nesses casos, é preciso interpretar cada etapa antes de reorganizá-la.

6 Porcentagem e pontos percentuais

Definição 6.1: Ponto percentual

A diferença entre duas taxas expressas em porcentagem pode ser medida em **pontos percentuais**, abreviados por p.p. Se uma taxa passa de $a\%$ para $b\%$, a diferença é

$$(b - a) \text{ pontos percentuais.}$$

Exemplo

Uma taxa passa de 20% para 25%.

- Aumento em pontos percentuais: $25 - 20 = 5$ p.p.
- Aumento relativo da própria taxa:

$$\frac{25 - 20}{20} = 0,25 = 25\%.$$

Assim, houve aumento de 5 pontos percentuais, equivalente a aumento relativo de 25% sobre a taxa anterior.

Atenção

Aumentar 10% e aumentar 10 pontos percentuais não significam a mesma coisa. Uma taxa de 30% aumentada em 10% torna-se 33%; aumentada em 10 pontos percentuais, torna-se 40%.

7 Descontos, acréscimos e formação de preços

7.1 Preço, desconto e acréscimo

Definição 7.1: Desconto e acréscimo monetários

Para um preço-base B :

$$D = \frac{p}{100}B \quad \text{e} \quad A = \frac{q}{100}B$$

são, respectivamente, o desconto monetário de $p\%$ e o acréscimo monetário de $q\%$, quando ambos incidem sobre a base B .

Exemplo

Um item de R\$ 240,00 recebe desconto de 15%:

$$D = 0,15 \cdot 240 = 36, \quad V_f = 240 - 36 = 204.$$

O desconto é R\$ 36,00 e o preço final é R\$ 204,00.

7.2 Desconto anunciado e desconto efetivo

Definição 7.2: Taxa efetiva de desconto

Se P_a é o preço de referência anunciado e P_f é o preço final, com $P_a > 0$, a taxa efetiva de desconto é

$$d = 1 - \frac{P_f}{P_a}.$$

Exemplo

Um preço anunciado de R\$ 300,00 torna-se R\$ 255,00. Então

$$d = 1 - \frac{255}{300} = 0,15.$$

O desconto efetivo sobre o preço anunciado é 15%.

Preço de referência

Para avaliar uma promoção, é necessário saber qual preço foi usado como base e se ele corresponde ao preço realmente praticado antes da oferta. O cálculo percentual correto não garante, sozinho, que a comparação comercial seja adequada.

7.3 Aumento sobre o custo e margem sobre a venda

Definição 7.3: Acréscimo sobre o custo

Se C é o custo e V é o preço de venda, com $C > 0$, o acréscimo relativo sobre o custo é

$$m_c = \frac{V - C}{C}.$$

Definição 7.4: Margem sobre o preço de venda

Se $V > 0$, a margem relativa sobre a venda é

$$m_v = \frac{V - C}{V}.$$

Exemplo

Um objeto custa R\$ 80,00 e é vendido por R\$ 100,00. A diferença é R\$ 20,00, mas as bases são distintas:

$$m_c = \frac{20}{80} = 25\%, \quad m_v = \frac{20}{100} = 20\%.$$

Logo, há acréscimo de 25% sobre o custo e margem de 20% sobre a venda.

8 Orçamento pessoal e familiar

Definição 8.1: Receita, despesa e saldo

Em determinado período, sejam R a receita total e D a despesa total. O saldo é

$$S = R - D.$$

Se $S > 0$, há superávit; se $S = 0$, equilíbrio; se $S < 0$, déficit.

Exemplo

Uma família recebe R\$ 4 800,00 no mês e gasta R\$ 4 080,00. Então

$$S = 4\,800 - 4\,080 = 720.$$

O saldo representa

$$\frac{720}{4\,800} = 0,15 = 15\%$$

da receita mensal.

Definição 8.2: Taxa de poupança do período

Quando o saldo S é não negativo e a receita R é positiva, define-se a taxa de poupança do

período por

$$t_p = \frac{S}{R}.$$

Observação

Classificações como despesas fixas, variáveis, necessárias ou discricionárias ajudam a analisar o orçamento, mas dependem da realidade de cada pessoa ou família. O objetivo matemático é registrar bases comparáveis e tornar as decisões explícitas.

Construção de um orçamento fictício

Crie uma família fictícia e registre, em uma planilha, receita e despesas mensais. Para cada despesa, calcule sua porcentagem sobre a receita. Verifique se a soma das categorias coincide com a despesa total e simule:

1. aumento de 7% em uma categoria;
2. redução de 5% em outra;
3. mudança resultante no saldo e na taxa de poupança.

Não utilize dados pessoais ou confidenciais.

9 Inflação, reajuste e poder de compra

Definição 9.1: Reajuste de uma cesta de preços

Neste curso, uma taxa de inflação i em um período será modelada como um aumento médio de preços por fator $1 + i$. Se uma cesta custava C_0 , o custo modelado após o período é

$$C_1 = C_0(1 + i).$$

Observação

Índices oficiais de inflação agregam muitos preços com pesos específicos. A variação percebida por uma pessoa pode ser diferente, pois sua cesta de consumo pode ter outra composição. Aqui utilizamos um modelo percentual simplificado.

Exemplo

Uma cesta de R\$ 600,00 sofre reajuste de 5%:

$$600 \cdot 1,05 = 630.$$

O acréscimo estimado é R\$ 30,00.

Teorema 9.1: Variação do poder de compra

Se todos os preços relevantes forem multiplicados por $1 + i$, com $i > -1$, e a quantia

disponível permanecer constante, a quantidade comprável é multiplicada por

$$\frac{1}{1+i}.$$

Para $i > 0$, a redução relativa do poder de compra é

$$\frac{i}{1+i}.$$

Demonstração

Se uma unidade custa inicialmente P , a quantia M compra M/P unidades. Após o reajuste, o preço é $P(1+i)$ e a mesma quantia compra

$$\frac{M}{P(1+i)} = \frac{M}{P} \cdot \frac{1}{1+i}.$$

Portanto, o fator do poder de compra é $1/(1+i)$. A redução relativa é

$$1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}.$$

Exemplo

Com aumento geral de preços de 10%, a mesma quantia conserva o fator

$$\frac{1}{1,10} \approx 0,9091$$

de seu poder de compra anterior. A redução aproximada é 9,09%, não exatamente 10%.

Teorema 9.2: Variação real simplificada

Se uma renda aumenta à taxa unitária s enquanto os preços aumentam à taxa i , com $i > -1$, então a variação real simplificada do poder de compra é

$$r_{\text{real}} = \frac{1+s}{1+i} - 1.$$

Demonstração

A renda é multiplicada por $1+s$ e cada preço por $1+i$. A quantidade comprável é, portanto, multiplicada pela razão

$$\frac{1+s}{1+i}.$$

Subtraindo 1, obtemos a taxa real.

Exemplo

Uma renda aumenta 8% enquanto uma cesta de referência aumenta 5%. A variação real aproximada é

$$\frac{1,08}{1,05} - 1 \approx 0,02857 = 2,857\%.$$

Não se trata exatamente de $8\% - 5\% = 3\%$, embora esse valor possa servir como aproximação para taxas pequenas.

10 Juros simples

Definição 10.1: Capital, juros e montante

- C : capital inicial;
- J : juros acumulados;
- M : montante final, dado por $M = C + J$;
- i : taxa de juros por período, na forma unitária;
- t : número de períodos compatíveis com a taxa.

Definição 10.2: Regime de juros simples

Nos juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o capital inicial C . Assim,

$$\boxed{J = Cit} \quad \text{e} \quad \boxed{M = C(1 + it)}.$$

Demonstração

Em cada período, o juro é Ci . Após t períodos, somam-se t parcelas iguais:

$$J = \underbrace{Ci + Ci + \cdots + Ci}_{t \text{ parcelas}} = Cit.$$

Como $M = C + J$,

$$M = C + Cit = C(1 + it).$$

Exemplo

Um capital de R\$ 1 200,00 é submetido, em um modelo de juros simples, à taxa de 2% ao mês durante 5 meses:

$$J = 1\,200 \cdot 0,02 \cdot 5 = 120,$$

$$M = 1\,200 + 120 = 1\,320.$$

Compatibilidade das unidades

Se a taxa é mensal, t deve ser contado em meses; se a taxa é anual, t deve ser expresso em anos. Converter unidades exige conhecer a convenção adotada no problema. Não se

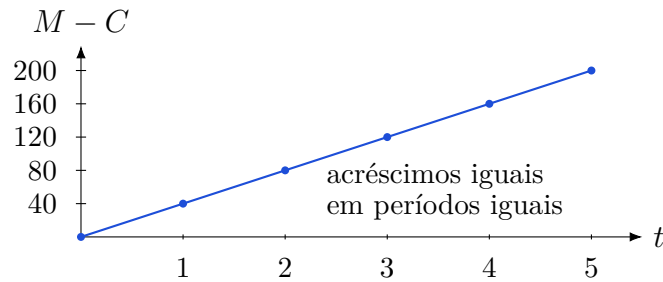
deve misturar, por exemplo, taxa mensal com quantidade de anos.

Teorema 10.1: Crescimento linear nos juros simples

Fixados C e i , o montante simples após t períodos é

$$M(t) = C + (Ci)t.$$

Logo, a cada período o montante aumenta pela mesma quantia Ci .



11 Juros compostos

Definição 11.1: Regime de juros compostos

Nos juros compostos, ao final de cada período os juros são incorporados ao saldo. No período seguinte, a mesma taxa incide sobre o saldo atualizado.

Teorema 11.1: Fórmula dos juros compostos

Para capital inicial C , taxa unitária i por período e número natural $t \geq 0$, o montante composto é

$$M = C(1 + i)^t.$$

Demonstração

No instante inicial, $M_0 = C$. Após um período,

$$M_1 = C(1 + i).$$

Após dois períodos,

$$M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^2.$$

Repetindo a multiplicação do saldo por $1 + i$ em cada período, após t períodos obtemos $M_t = C(1 + i)^t$.

Exemplo

Um capital de R\$ 2 000,00 cresce, em um modelo composto, à taxa de 3% ao mês por 4 meses:

$$M = 2\,000(1,03)^4 = 2\,000 \cdot 1,12550881 \approx 2\,251,02.$$

Os juros acumulados são aproximadamente R\$ 251,02.

Teorema 11.2: Taxa composta equivalente

Uma taxa unitária i aplicada por n períodos é equivalente, no período completo, à taxa

$$i_{\text{eq}} = (1 + i)^n - 1.$$

Demonstração

O fator acumulado é o produto de n fatores iguais:

$$\underbrace{(1 + i)(1 + i) \cdots (1 + i)}_{n \text{ fatores}} = (1 + i)^n.$$

Como fator = $1 +$ taxa equivalente, segue a fórmula.

Exemplo

Uma variação de 1% ao mês, repetida por 12 meses, produz a taxa efetiva acumulada

$$(1,01)^{12} - 1 \approx 0,126825.$$

Isso corresponde a aproximadamente 12,68%, e não exatamente 12%.

11.1 Comparação entre os regimes

Característica	Juros simples	Juros compostos
Base de cada período	Capital inicial	Saldo atualizado
Juros	$J = Cit$	$J = C[(1 + i)^t - 1]$
Montante	$C(1 + it)$	$C(1 + i)^t$
Tipo de crescimento	Linear em t	Multiplicativo em t

Teorema 11.3: Comparação para taxas positivas

Se $C > 0$, $i > 0$ e t é um número natural, então:

$$C(1 + i)^t \geq C(1 + it).$$

A igualdade ocorre para $t = 0$ ou $t = 1$; para $t \geq 2$, a desigualdade é estrita.

Demonstração

Pelo desenvolvimento do produto $(1 + i)^t$, os primeiros termos são $1 + ti$. Para $t \geq 2$, aparecem ainda parcelas positivas que contêm i^2 , i^3 e assim por diante. Logo,

$$(1 + i)^t \geq 1 + ti.$$

Multiplicando por $C > 0$, obtemos o resultado. Para $t \geq 2$ e $i > 0$, pelo menos uma

parcela adicional é positiva.

12 Modelagem de compras, parcelas e crédito

Definição 12.1: Total parcelado e acréscimo relativo

Se uma compra possui n parcelas iguais de valor q , o total nominal pago é

$$T = nq.$$

Comparando-o com um preço à vista $P > 0$, o acréscimo relativo nominal é

$$a = \frac{T - P}{P}.$$

Exemplo

Uma mercadoria custa R\$ 900,00 à vista ou 10 parcelas de R\$ 99,00. O total parcelado é

$$T = 10 \cdot 99 = 990.$$

O acréscimo nominal em relação ao preço à vista é

$$\frac{990 - 900}{900} = 0,10 = 10\%.$$

O tempo também importa

Comparar apenas os totais nominais é uma primeira análise, mas pagamentos em datas diferentes não são economicamente idênticos. Uma comparação completa pode exigir taxa de juros, datas de vencimento, entrada, tarifas, seguros, impostos e o custo de oportunidade do dinheiro.

Definição 12.2: Custo total informado no problema

Em um modelo escolar, se há entrada E , n parcelas de valor q e tarifas adicionais conhecidas A , o desembolso nominal total é

$$T = E + nq + A.$$

Exemplo

Uma proposta exige entrada de R\$ 300,00, 8 parcelas de R\$ 145,00 e tarifa única de R\$ 40,00:

$$T = 300 + 8 \cdot 145 + 40 = 1\,500.$$

Se o preço à vista é R\$ 1 250,00, o acréscimo nominal é

$$\frac{1\,500 - 1\,250}{1\,250} = 0,20 = 20\%.$$

Taxa anunciada e custo total

Uma taxa isolada não descreve necessariamente todo o custo de uma operação. Em situações reais, devem ser lidos o contrato, o valor total, as datas e todos os encargos. Neste curso, utilize somente os dados explicitamente fornecidos no enunciado e registre as limitações do modelo.

13 Comparação de propostas e tomada de decisão

13.1 Critérios quantitativos e qualitativos

Uma decisão financeira bem fundamentada separa dados, cálculos e critérios. Entre os aspectos quantitativos, podem aparecer:

- preço à vista e total parcelado;
- valor da entrada e das parcelas;
- taxas e fatores de atualização;
- prazo, tarifas e custo total;
- impacto da compra no orçamento.

Também podem importar aspectos qualitativos: necessidade, durabilidade, garantia, possibilidade de manutenção, risco de atraso, estabilidade da renda, condições contratuais e impacto ambiental.

Matriz de comparação

Considere três propostas fictícias para o mesmo produto. Construa uma tabela com preço à vista, entrada, número de parcelas, valor da parcela, tarifas, total nominal e acréscimo percentual sobre o preço à vista. Depois, escreva uma conclusão condicional: indique qual proposta minimiza o desembolso e explique por que outra opção poderia ser escolhida sob uma restrição de orçamento.

13.2 Desconto à vista e percentual sobre o preço a prazo

Exemplo

Um produto custa $R\$ 1\,080,00$ a prazo e $R\$ 972,00$ à vista. Tomando o preço a prazo como base, o desconto à vista é

$$\frac{1\,080 - 972}{1\,080} = 0,10 = 10\%.$$

Tomando o preço à vista como base, o acréscimo do prazo é

$$\frac{1\,080 - 972}{972} = \frac{108}{972} \approx 11,11\%.$$

As taxas são diferentes porque as bases são diferentes.

14 Tecnologias digitais: calculadora e planilha

14.1 Uso consciente da calculadora

A calculadora executa operações, mas o estudante deve:

1. identificar a base e a taxa;
2. converter a taxa percentual em fator;
3. prever se o resultado deve aumentar ou diminuir;
4. registrar a expressão matemática;
5. conferir a ordem de grandeza e arredondar apenas quando necessário.

Exemplo

Para calcular dois descontos sucessivos de 12% e 5% sobre $R\$ 800,00$, registre

$$800 \times 0,88 \times 0,95.$$

O resultado é 668,8, isto é, $R\$ 668,80$. O fator total 0,836 corresponde a desconto equivalente de 16,4%.

14.2 Modelo de planilha

Considere a seguinte organização:

Célula	Conteúdo	Significado
A2	1000	valor inicial
B2	10%	primeira variação
C2	-5%	segunda variação
D2	=A2*(1+B2)	valor após a primeira variação
E2	=D2*(1+C2)	valor final
F2	=E2/A2-1	taxa equivalente

Com esses dados, a planilha calcula:

$$1\,000 \cdot 1,10 \cdot 0,95 = 1\,045,$$

e a célula F2 fornece 0,045, que deve ser formatado como 4,5%.

Atenção

Em uma planilha, digitar 10% geralmente armazena 0,10. Digitar 10 armazena dez unidades, que é cem vezes maior. Verifique sempre o conteúdo e a formatação da célula.

14.3 Fórmulas úteis

Objetivo	Fórmula de planilha
Parte percentual	=A2*B2
Aumento ou redução	=A2*(1+B2)
Taxa entre valor inicial e final	=B2/A2-1
Juros simples	=A2*(1+B2*C2)
Juros compostos	=A2*(1+B2)^C2
Total com entrada e parcelas	=A2+B2*C2+D2

Simulador de cenários

Construa uma planilha com valor inicial, três taxas sucessivas e resultado final. Crie pelo menos quatro cenários, incluindo aumentos e reduções. Em cada linha, calcule o fator total e a taxa equivalente. Altere uma taxa por vez e descreva como o resultado muda.

14.4 Tabela de evolução temporal

Para acompanhar um valor composto, uma planilha pode utilizar:

Coluna	Primeira linha de dados	Próximas linhas
A: período	0	=A2+1
B: saldo	capital inicial	=B2*(1+\$E\$2)
C: juros do período	0	=B2*\$E\$2
E2: taxa	taxa digitada	célula fixa

Os sinais \$ mantêm a referência da taxa fixa ao copiar a fórmula. Esse recurso permite comparar a evolução observada na tabela com $M = C(1 + i)^t$.

15 Estratégias para resolver e elaborar problemas

15.1 Roteiro de resolução

1. **Identifique a pergunta.** Procura-se parte, base, taxa, valor final, taxa equivalente ou comparação?
2. **Nomeie os dados.** Registre valores com unidades e períodos.
3. **Determine a base.** Sobre qual valor cada taxa incide?
4. **Converta porcentagens em fatores.** Aumento: $1 + r$; redução: $1 - r$.
5. **Modele antes de calcular.** Escreva a expressão completa.
6. **Calcule e verifique.** Compare o resultado com uma estimativa.
7. **Interprete.** Responda com unidade, taxa e referência temporal.

Problema completo

Uma mensalidade de R\$ 750,00 sofre reajuste de 6%. No mês seguinte, recebe desconto temporário de 4% sobre o valor reajustado. Determine o valor final e a variação equivalente.

Modelo:

$$V_f = 750 \cdot 1,06 \cdot 0,96.$$

Cálculo:

$$V_f = 763,20.$$

O fator total é $1,06 \cdot 0,96 = 1,0176$; logo, a variação equivalente é aumento de 1,76%.

15.2 Como elaborar um bom problema

Um problema percentual bem formulado deve:

- fornecer os dados necessários, sem informações contraditórias;
- tornar identificável a base de cada percentual;

- indicar a ordem temporal quando houver etapas sucessivas;
- usar unidades e períodos compatíveis;
- produzir valores plausíveis no contexto;
- apresentar uma pergunta objetiva;
- permitir que a resposta seja verificada.

Elaboração e validação

Elabore um problema com duas variações sucessivas e outro envolvendo orçamento. Troque os problemas com um colega. Cada estudante deve resolver, apontar a base de cada taxa e verificar se o enunciado contém dados suficientes. Depois, revisem os textos e apresentem uma solução comentada.

15.3 Estimativas para conferência

Antes do cálculo exato, valores conhecidos ajudam a prever resultados:

$$10\% = \frac{1}{10}, \quad 25\% = \frac{1}{4}, \quad 50\% = \frac{1}{2}, \quad 75\% = \frac{3}{4}.$$

Por exemplo, 18% de 400 deve ser um pouco menor que 20% de 400, isto é, menor que 80. O valor exato, 72, é coerente.

16 Erros frequentes e como evitá-los

1. **Somar percentuais sucessivos automaticamente.**
Correção: multiplique os fatores e subtraia 1 ao final.
2. **Usar a base errada.**
Correção: escreva explicitamente de qual valor se calcula a porcentagem.
3. **Confundir $p\%$ com o número p .**
Correção: converta $p\%$ em $p/100$.
4. **Achar que aumento e redução iguais se anulam.**
Correção: compare $(1 + r)(1 - r) = 1 - r^2$ com 1.
5. **Confundir porcentagem e ponto percentual.**
Correção: pontos percentuais medem a subtração direta entre taxas.
6. **Arredondar em cada etapa.**
Correção: conserve casas adicionais e arredonde o resultado final.
7. **Misturar taxa mensal e tempo anual.**
Correção: compatibilize as unidades antes de aplicar uma fórmula.
8. **Comparar propostas por uma única informação.**
Correção: considere total, datas, entrada, tarifas, orçamento e condições.

9. **Tratar uma média de preços como experiência individual exata.**

Correção: reconheça as hipóteses e limitações do índice utilizado.

Síntese

percentual $\rightarrow$ taxa unitária $\rightarrow$ fator

$$p\% \rightarrow \frac{p}{100} \rightarrow 1 \pm \frac{p}{100}$$

Em variações sucessivas, os fatores são multiplicados. A interpretação final sempre depende da base, do período e do contexto.

17 Lista de exercícios

17.1 Porcentagem, parte, base e taxa

1. Converta para número decimal:

7%, 42,5%, 0,8%, 135%.

2. Converta para porcentagem:

0,09, 0,625, 1,4, 0,003.

3. Calcule:

a) 15% de 320;

c) 125% de 64;

b) 2,5% de 800;

d) 0,4% de 2 500.

4. 54 correspondem a quantos por cento de 240?

5. R\$ 84,00 correspondem a 35% de qual valor?

6. Em uma pesquisa com 1 200 respostas, 714 escolheram a opção A. Determine a porcentagem correspondente.

7. Uma população de 8 000 indivíduos contém 1 360 pertencentes a certo grupo. Determine a taxa percentual.

8. Determine x :

$$18\% \text{ de } x = 63.$$

9. Uma quantidade passa de 250 para 290. Calcule a variação absoluta e a taxa percentual.

10. Uma quantidade passa de 500 para 425. Calcule a variação absoluta e a taxa percentual.

17.2 Aumentos, reduções e valor original

11. Calcule o valor final de $R\$ 460,00$ após aumento de 12%.
12. Calcule o valor final de $R\$ 750,00$ após desconto de 16%.
13. Um preço de $R\$ 180,00$ passa para $R\$ 207,00$. Determine a taxa de aumento.
14. Um produto custa $R\$ 391,00$ após desconto de 15% sobre o preço original. Qual era esse preço?
15. Após aumento de 8%, uma mensalidade passou a $R\$ 1\,026,00$. Qual era seu valor anterior?
16. Associe cada fator à transformação correspondente:

1,07, 0,68, 1,5, 0,995.

17. Um produto de $R\$ 240,00$ recebe desconto de $R\$ 30,00$. Qual é a taxa de desconto?
18. Uma despesa aumenta de $R\$ 1\,600,00$ para $R\$ 1\,744,00$. Determine o aumento percentual.
19. Explique por que acrescentar 30% ao preço já reduzido em 30% não recupera o preço inicial.
20. Após redução de 36%, que aumento percentual é necessário para retornar exatamente ao valor inicial?

17.3 Percentuais sucessivos

21. Determine o fator total e a taxa equivalente:
 - a) aumentos de 10% e 15%;
 - b) reduções de 20% e 10%;
 - c) aumento de 25% e redução de 20%;
 - d) redução de 5% e aumento de 12%.
22. Um preço de $R\$ 800,00$ recebe descontos sucessivos de 15% e 10%. Calcule o preço final e o desconto equivalente.
23. Uma população de 20 000 cresce 4% em um ano e 6% no ano seguinte. Determine a população modelada e a taxa acumulada.
24. Um equipamento perde 20% de seu valor no primeiro ano e 15% no segundo. Partindo de $R\$ 5\,000,00$, determine o valor modelado ao final e a desvalorização total.
25. Um valor aumenta 30% e diminui 30%. Determine a variação equivalente.
26. Três reajustes sucessivos são de 5%, 4% e 3%. Determine a taxa única equivalente.
27. Um preço sofre aumento de 12%. Qual desconto, aplicado ao novo preço, recupera o valor inicial?
28. Um preço sofre desconto de 25%. Qual aumento, aplicado ao novo preço, recupera o valor inicial?

29. Uma loja oferece duas promoções sobre o mesmo preço:

- promoção A: desconto único de 28%;
- promoção B: descontos sucessivos de 20% e 10%.

Compare-as.

30. É possível obter aumento total de 50% por meio de dois aumentos sucessivos iguais? Sem usar logaritmos, encontre a taxa aproximada testando valores com calculadora.

17.4 Educação financeira

31. Uma renda mensal é de R\$ 3 600,00 e as despesas totalizam R\$ 3 060,00. Calcule o saldo e a taxa de poupança do período.

32. Uma família destina 28% de uma renda de R\$ 5 500,00 à moradia. Calcule o valor dessa categoria.

33. Uma cesta de R\$ 720,00 sofre reajustes sucessivos de 3% e 2%. Determine o novo valor.

34. Uma renda cresce 6% e uma cesta de referência cresce 4%. Calcule a variação real simplificada do poder de compra.

35. Calcule juros e montante simples de R\$ 2 500,00 a 1,5% ao mês durante 8 meses.

36. Em juros simples, qual capital produz R\$ 180,00 de juros à taxa de 2% ao mês durante 6 meses?

37. Calcule o montante composto de R\$ 1 500,00 a 2% ao período durante 6 períodos. Arredonde para centavos.

38. Compare, após 5 períodos, os montantes simples e composto de R\$ 1 000,00 à taxa de 4% por período.

39. Uma compra custa R\$ 1 400,00 à vista ou 12 parcelas de R\$ 126,00. Calcule o total parcelado e o acréscimo nominal sobre o preço à vista.

40. Uma proposta tem entrada de R\$ 250,00, 10 parcelas de R\$ 118,00 e tarifa de R\$ 20,00. Calcule o total nominal. Se o preço à vista é R\$ 1 250,00, determine o acréscimo percentual.

41. Um comerciante compra um item por R\$ 120,00 e o vende por R\$ 150,00. Calcule o acréscimo sobre o custo e a margem sobre a venda.

42. Uma taxa passa de 12% para 15%. Expresse a mudança em pontos percentuais e como aumento relativo da taxa inicial.

17.5 Tecnologia, análise e elaboração

43. Escreva uma fórmula de planilha que calcule o resultado de três variações armazenadas em B2, C2 e D2 sobre o valor inicial A2.

44. Uma planilha contém $A2 = 2400$, $B2 = 1,5\%$ e $C2 = 10$. Interprete e calcule a fórmula $=A2*(1+B2)^{C2}$.

45. Construa uma tabela com os saldos, do período 0 ao 5, de R\$ 1 000,00 sob crescimento composto de 3% por período.
46. Use calculadora para comparar a taxa acumulada de 0,5% ao mês durante 12 meses com a soma simples de 6%.
47. Elabore um problema de dois descontos sucessivos cujo desconto equivalente seja 28%. Apresente dados e solução.
48. Elabore um problema em que seja necessário descobrir a taxa percentual, e não o valor final.
49. Crie duas propostas fictícias de compra. Inclua preço à vista, entrada, parcelas e uma tarifa. Formule uma pergunta que exija comparação do total e do impacto no orçamento.
50. Analise criticamente a afirmação de que um desconto de 50% seguido de outro de 50% torna o produto gratuito.

18 Questões de aprofundamento

- A1. Demonstre diretamente que duas taxas sucessivas r e s podem ser substituídas por $r + s + rs$. Interprete o termo rs .
- A2. Para quais valores de r a composição de aumento r com redução r mantém o valor inicial? Justifique.
- A3. Um valor sofre duas variações sucessivas cuja taxa equivalente é zero. Se a primeira é aumento de taxa $r > 0$, determine algebricamente a segunda.
- A4. Mostre que, sob crescimento composto de taxa positiva, os acréscimos absolutos de períodos sucessivos aumentam na mesma razão $1 + i$.
- A5. Explique por que uma inflação de 25% reduz o poder de compra de uma quantia fixa em 20% no modelo simplificado.
- A6. Um produto é vendido com margem de 30% sobre o preço de venda. Determine o acréscimo correspondente sobre o custo.

19 Avaliação-síntese

Orientações. Apresente os cálculos, identifique a base de cada taxa, utilize unidades e arredonde valores monetários para centavos somente ao final.

- S1. a) Escreva 32% na forma decimal.
b) Escreva 0,075 na forma percentual.
c) Calcule 27% de 840.
- S2. Um produto custa R\$ 306,00 após desconto de 15%. Determine seu preço anterior.

- S3.** Um valor de $R\$ 1\,250,00$ aumenta 12% e depois diminui 8%. Determine o valor final e a taxa equivalente.
- S4.** Após aumento de 40%, qual redução percentual recupera exatamente o valor inicial?
- S5.** Uma taxa passa de 18% para 22,5%. Expresse a mudança em pontos percentuais e como variação relativa.
- S6.** Uma família tem receita de $R\$ 4\,200,00$. Suas despesas são: $R\$ 1\,260,00$ com moradia, $R\$ 840,00$ com alimentação e $R\$ 1\,470,00$ com outras categorias.
- Calcule saldo e taxa de poupança.
 - Se a alimentação aumentar 10%, mantendo-se os demais valores, recalcule saldo e taxa de poupança.
- S7.** Uma renda aumenta 7% e uma cesta de preços aumenta 5%. Determine a variação real simplificada do poder de compra.
- S8.** Calcule juros e montante, no regime simples, para $C = R\$ 1\,800,00$, $i = 1,2\%$ ao mês e $t = 10$ meses.
- S9.** Calcule o montante composto de $R\$ 2\,000,00$ à taxa de 2,5% ao período por 8 períodos.
- S10.** Um produto pode ser adquirido:
- à vista, com 5% de desconto sobre $R\$ 1\,600,00$;
 - com entrada de $R\$ 320,00$ e 8 parcelas de $R\$ 165,00$.
- Calcule os dois totais e o acréscimo nominal da opção parcelada sobre a opção à vista.
- S11.** Um anúncio afirma que dois descontos sucessivos de 30% equivalem a desconto de 60%. Verifique a afirmação e corrija-a.
- S12.** Escreva fórmulas de planilha para:
- calcular duas variações sucessivas B2 e C2 sobre o valor A2;
 - calcular a taxa equivalente comparando o resultado D2 com A2;
 - calcular juros compostos com capital A2, taxa B2 e períodos C2.

20 Gabarito comentado

20.1 Exercícios 1 a 10

1. Dividindo por 100:

0,07; 0,425; 0,008; 1,35.

2. Multiplicando cada decimal por 100:

9%; 62,5%; 140%; 0,3%.

3.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 0,15 \cdot 320 = 48, & \text{b)} 0,025 \cdot 800 = 20, \\ \text{c)} 1,25 \cdot 64 = 80, & \text{d)} 0,004 \cdot 2\,500 = 10. \end{array}$$

4.

$$100 \cdot \frac{54}{240} = 22,5.$$

Portanto, 22,5%.

5.

$$B = \frac{84}{0,35} = 240.$$

O valor é R\$ 240,00.

6.

$$100 \cdot \frac{714}{1\,200} = 59,5.$$

Logo, 59,5%.

7.

$$100 \cdot \frac{1\,360}{8\,000} = 17.$$

Logo, 17%.

8.

$$0,18x = 63 \implies x = \frac{63}{0,18} = 350.$$

9.

$$\Delta V = 290 - 250 = 40, \quad \frac{40}{250} = 0,16.$$

Aumento absoluto de 40 e percentual de 16%.

10.

$$\Delta V = 425 - 500 = -75, \quad \frac{-75}{500} = -0,15.$$

Redução absoluta de 75 e percentual de 15%.

20.2 Exercícios 11 a 20

11.

$$460 \cdot 1,12 = 515,20.$$

Valor final: R\$ 515,20.

12.

$$750 \cdot 0,84 = 630.$$

Valor final: R\$ 630,00.

13.

$$\frac{207 - 180}{180} = \frac{27}{180} = 0,15.$$

Aumento de 15%.

14. O fator de desconto é 0,85:

$$V_i = \frac{391}{0,85} = 460.$$

Preço original: R\$ 460,00.

- 15.

$$V_i = \frac{1\,026}{1,08} = 950.$$

Valor anterior: R\$ 950,00.

- 16.

1,07	aumento de 7%
0,68	redução de 32%
1,5	aumento de 50%
0,995	redução de 0,5%

- 17.

$$\frac{30}{240} = 0,125 = 12,5\%.$$

- 18.

$$\frac{1\,744 - 1\,600}{1\,600} = \frac{144}{1\,600} = 0,09.$$

Aumento de 9%.

19. O fator total é

$$0,70 \cdot 1,30 = 0,91.$$

O resultado é 91% do original, isto é, ainda há redução de 9%. O aumento de 30% incide sobre uma base menor.

20. Após a redução, permanece o fator 0,64. O fator de retorno é

$$\frac{1}{0,64} = 1,5625.$$

Portanto, é necessário aumento de 56,25%.

20.3 Exercícios 21 a 30

21. a) $1,10 \cdot 1,15 = 1,265$: aumento de 26,5%;

b) $0,80 \cdot 0,90 = 0,72$: redução de 28%;

c) $1,25 \cdot 0,80 = 1$: variação equivalente nula;

d) $0,95 \cdot 1,12 = 1,064$: aumento de 6,4%.

- 22.

$$800 \cdot 0,85 \cdot 0,90 = 612.$$

O fator é 0,765; o desconto equivalente é 23,5%.

- 23.

$$20\,000 \cdot 1,04 \cdot 1,06 = 22\,048.$$

O fator é 1,1024; a taxa acumulada é 10,24%.

24.

$$5\,000 \cdot 0,80 \cdot 0,85 = 3\,400.$$

O fator é 0,68; a desvalorização total é 32%.

25.

$$1,30 \cdot 0,70 = 0,91.$$

A variação equivalente é redução de 9%.

26.

$$1,05 \cdot 1,04 \cdot 1,03 = 1,12476.$$

Taxa equivalente: 12,476%.

27. Se q é o desconto:

$$1,12(1 - q) = 1 \implies q = 1 - \frac{1}{1,12} \approx 0,107143.$$

Desconto aproximado de 10,7143%.

28.

$$0,75(1 + q) = 1 \implies q = \frac{1}{0,75} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Aumento de $33,\bar{3}\%$.

29. A promoção A tem fator 0,72. Na B,

$$0,80 \cdot 0,90 = 0,72.$$

Portanto, as promoções produzem o mesmo preço final.

30. Se r é a taxa unitária de cada aumento:

$$(1 + r)^2 = 1,5.$$

Por testes com calculadora, $1 + r \approx 1,224745$, logo $r \approx 0,224745$. Cada aumento deve ser de aproximadamente 22,47%.

20.4 Exercícios 31 a 42

31.

$$S = 3\,600 - 3\,060 = 540, \quad \frac{540}{3\,600} = 0,15.$$

Saldo de R\$ 540,00 e taxa de poupança de 15%.

32.

$$0,28 \cdot 5\,500 = 1\,540.$$

A categoria recebe R\$ 1 540,00.

33.

$$720 \cdot 1,03 \cdot 1,02 = 756,432.$$

Novo valor monetário: R\$ 756,43, após arredondamento final.

34.

$$\frac{1,06}{1,04} - 1 \approx 0,0192308.$$

Aumento real simplificado de aproximadamente 1,92%.

35.

$$J = 2\,500 \cdot 0,015 \cdot 8 = 300, \quad M = 2\,500 + 300 = 2\,800.$$

Juros de R\$ 300,00 e montante de R\$ 2 800,00.

36.

$$180 = C \cdot 0,02 \cdot 6 \implies C = \frac{180}{0,12} = 1\,500.$$

Capital de R\$ 1 500,00.

37.

$$M = 1\,500(1,02)^6 \approx 1\,689,24.$$

Montante de R\$ 1 689,24 e juros de aproximadamente R\$ 189,24.

38. No regime simples,

$$M_s = 1\,000(1 + 0,04 \cdot 5) = 1\,200.$$

No composto,

$$M_c = 1\,000(1,04)^5 \approx 1\,216,65.$$

O composto é aproximadamente R\$ 16,65 maior.

39.

$$T = 12 \cdot 126 = 1\,512, \quad \frac{1\,512 - 1\,400}{1\,400} = 0,08.$$

Total de R\$ 1 512,00 e acréscimo nominal de 8%.

40.

$$T = 250 + 10 \cdot 118 + 20 = 1\,450.$$

Como a diferença para R\$ 1 250,00 é R\$ 200,00,

$$\frac{200}{1\,250} = 0,16.$$

Acréscimo nominal de 16%.

41. O ganho é $150 - 120 = 30$. Assim,

$$\frac{30}{120} = 25\% \quad \text{e} \quad \frac{30}{150} = 20\%.$$

Acréscimo sobre o custo de 25% e margem sobre a venda de 20%.

42. A diferença direta é

$$15 - 12 = 3 \text{ p.p.}$$

A variação relativa é

$$\frac{15 - 12}{12} = 0,25 = 25\%.$$

20.5 Exercícios 43 a 50

43. Uma fórmula possível é

$$=A2*(1+B2)*(1+C2)*(1+D2).$$

As células B2, C2 e D2 devem conter taxas unitárias ou valores formatados como porcentagem; reduções devem ser negativas.

44. A fórmula representa 10 aplicações sucessivas de 1,5% sobre R\$ 2 400,00:

$$2\,400(1,015)^{10} \approx 2\,785,30.$$

45. A tabela, arredondada para centavos na apresentação, é:

t	M_t (R\$)
0	1 000,00
1	1 030,00
2	1 060,90
3	1 092,73
4	1 125,51
5	1 159,27

Os valores não arredondados devem ser mantidos nos cálculos internos.

46.

$$(1,005)^{12} - 1 \approx 0,0616778.$$

A taxa acumulada é aproximadamente 6,1678%, cerca de 0,1678 ponto percentual acima da soma simples de 6%.

47. Resposta possível: um produto de R\$ 500,00 recebe descontos sucessivos de 20% e 10%. Então

$$500 \cdot 0,80 \cdot 0,90 = 360.$$

O fator 0,72 representa desconto equivalente de 28%.

48. Resposta possível: um ingresso passou de R\$ 120,00 para R\$ 150,00. Qual foi a taxa de aumento?

$$\frac{150 - 120}{120} = 0,25 = 25\%.$$

49. Resposta possível: preço à vista de R\$ 1 200,00. Proposta A: entrada de R\$ 200,00, dez parcelas de R\$ 110,00 e tarifa de R\$ 20,00, totalizando R\$ 1 320,00. Proposta B: seis parcelas de R\$ 210,00, totalizando R\$ 1 260,00. A B tem menor total, mas excede um limite mensal hipotético de R\$ 180,00; a A cabe nesse limite após a entrada. Uma boa resposta deve explicitar que menor total e maior adequação mensal podem apontar para alternativas diferentes.

50. Dois descontos de 50% produzem fator

$$0,50 \cdot 0,50 = 0,25.$$

O preço final é 25% do inicial, portanto o desconto equivalente é 75%. O produto não se torna gratuito.

20.6 Questões de aprofundamento

A1.

$$(1+r)(1+s) = 1 + r + s + rs.$$

Logo, a taxa equivalente é $r + s + rs$. O termo rs representa a ação da segunda taxa sobre a parcela que já foi acrescentada ou retirada pela primeira variação.

A2.

$$(1+r)(1-r) = 1 - r^2.$$

Para manter o valor inicial, precisamos de $1 - r^2 = 1$, isto é, $r^2 = 0$. No conjunto dos reais, a única solução é $r = 0$.

A3. Se a segunda taxa é s ,

$$(1+r)(1+s) = 1 \implies s = \frac{1}{1+r} - 1 = -\frac{r}{1+r}.$$

Portanto, a segunda variação deve ser uma redução de taxa unitária $r/(1+r)$.

A4. No período t , o saldo é $M_t = C(1+i)^t$. O acréscimo do período é

$$\begin{aligned}\Delta_t &= M_t - M_{t-1} \\ &= C(1+i)^t - C(1+i)^{t-1} \\ &= Ci(1+i)^{t-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\Delta_{t+1}}{\Delta_t} = 1 + i.$$

A5. O fator dos preços é 1,25. O fator do poder de compra de uma quantia fixa é

$$\frac{1}{1,25} = 0,80.$$

Portanto, conserva-se 80% do poder de compra, uma redução de 20%.

A6. Se V é o preço de venda, o ganho é $0,30V$ e o custo é $C = 0,70V$. Logo, o acréscimo sobre o custo é

$$\frac{0,30V}{0,70V} = \frac{3}{7} \approx 0,42857.$$

Portanto, aproximadamente 42,86%.

20.7 Avaliação-síntese

S1.

$$\text{a) } 0,32; \quad \text{b) } 7,5\%; \quad \text{c) } 0,27 \cdot 840 = 226,8.$$

S2. O fator após o desconto é 0,85:

$$V_i = \frac{306}{0,85} = 360.$$

Preço anterior: R\$ 360,00.

S3.

$$V_f = 1\,250 \cdot 1,12 \cdot 0,92 = 1\,288.$$

O fator total é 1,0304; logo, houve aumento equivalente de 3,04%.

S4.

$$q = \frac{100 \cdot 40}{100 + 40} = \frac{200}{7} \approx 28,57.$$

Redução aproximada de 28,57%.

S5.

$$22,5 - 18 = 4,5 \text{ p.p.}, \quad \frac{22,5 - 18}{18} = 0,25.$$

Aumento de 4,5 pontos percentuais ou 25% relativamente à taxa inicial.

S6. Inicialmente,

$$D = 1\,260 + 840 + 1\,470 = 3\,570,$$

$$S = 4\,200 - 3\,570 = 630, \quad \frac{630}{4\,200} = 15\%.$$

Após o aumento, a alimentação custa $840 \cdot 1,10 = 924$. Assim,

$$D' = 1\,260 + 924 + 1\,470 = 3\,654,$$

$$S' = 4\,200 - 3\,654 = 546, \quad \frac{546}{4\,200} = 13\%.$$

S7.

$$\frac{1,07}{1,05} - 1 \approx 0,0190476.$$

Aumento real simplificado de aproximadamente 1,90%.

S8.

$$J = 1\,800 \cdot 0,012 \cdot 10 = 216, \quad M = 1\,800 + 216 = 2\,016.$$

S9.

$$M = 2\,000(1,025)^8 \approx 2\,436,81.$$

S10. À vista,

$$1\,600 \cdot 0,95 = 1\,520.$$

Parcelado,

$$320 + 8 \cdot 165 = 1\,640.$$

O acréscimo nominal é

$$\frac{1\,640 - 1\,520}{1\,520} \approx 0,078947.$$

Portanto, aproximadamente 7,89%.

S11.

$$0,70 \cdot 0,70 = 0,49.$$

O preço final é 49% do inicial; o desconto equivalente é 51%, e não 60%.

S12. Fórmulas possíveis:

a) $=A2 \cdot (1+B2) \cdot (1+C2);$

b) $=D2/A2-1;$

c) $=A2 \cdot (1+B2)^{C2}.$

21 Resumo final

Mapa de fórmulas essenciais

$$p\% = \frac{p}{100}$$

$$P = \frac{p}{100}B$$

$$p = 100\frac{P}{B}$$

$$V_f = V_i(1 + r)$$

$$F_{\text{total}} = \prod_{k=1}^n (1 + r_k)$$

$$r_{\text{eq}} = F_{\text{total}} - 1$$

$$J_{\text{simples}} = Cit$$

$$M_{\text{simples}} = C(1 + it)$$

$$M_{\text{composto}} = C(1 + i)^t$$

$$r_{\text{real}} = \frac{1 + s}{1 + i} - 1$$

- Porcentagem é uma razão de denominador 100.
- Toda taxa precisa de uma base claramente identificada.
- Aumentos e reduções são representados por fatores multiplicativos.
- Em percentuais sucessivos, multiplicam-se os fatores.
- Taxa percentual e ponto percentual são medidas diferentes.
- Juros simples crescem por acréscimos iguais; juros compostos, por fatores iguais.
- Uma comparação financeira responsável explicita hipóteses, prazos, custos e restrições.
- Calculadoras e planilhas ampliam a investigação, mas não substituem a modelagem nem a validação do resultado.

Referência normativa

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Matemática, 9º ano, habilidade EF09MA05. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.

Fim do curso — Porcentagens Sucessivas e Educação Financeira