

Potências com Expoentes Negativos e Fracionários

Curso completo de Matemática — 9º ano do Ensino Fundamental

Alinhado à habilidade EF09MA03 da BNCC

Sumário

1	Apresentação e objetivos de aprendizagem	1
2	Revisão: potências com expoentes naturais	1
2.1	Definição fundamental	1
2.2	Casos especiais de base	2
3	Propriedades fundamentais da potenciação	3
3.1	Produto de potências de mesma base	3
3.2	Quociente de potências de mesma base	3
3.3	Potência de uma potência	3
3.4	Potência de produto e de quociente	4
4	Expoente zero	4
4.1	Por que o expoente zero deve produzir 1?	4
4.2	Sequência de potências	5
5	Expoentes inteiros negativos	5
5.1	Definição	5
5.2	Restrições envolvendo zero	6
5.3	Propriedades para expoentes inteiros	7
5.4	Potências de base dez	7
6	Radiciação e raízes n-ésimas	8
6.1	Radiciação como operação inversa	8
6.2	Índice par e índice ímpar	8
6.3	Raiz principal	9
7	Propriedades dos radicais	9

8	Expoentes fracionários	10
8.1	A origem do expoente $1/n$	10
8.2	Expoente fracionário negativo	11
8.3	Bases negativas	11
8.4	Quadro de existência no conjunto real	12
9	Leis dos expoentes racionais	12
10	Conversão entre potências e radicais	13
10.1	Simplificação por expoentes racionais	14
11	Simplificação de expressões	14
11.1	Eliminação de expoentes negativos	14
11.2	Extração de fatores do radical	15
11.3	Racionalização simples	15
12	Ordem de grandeza e comportamento das potências	16
13	Aplicações geométricas e científicas	16
13.1	Lado de um quadrado a partir da área	16
13.2	Aresta de um cubo a partir do volume	17
13.3	Escalas de área e volume	17
13.4	Grandezas inversamente proporcionais a potências	18
14	Equações elementares com potências e raízes	18
14.1	Equações do tipo $x^n = a$	18
14.2	Equações com expoentes negativos	19
14.3	Equações com expoentes fracionários	19
15	Erros frequentes	19
16	Estratégias de resolução	20
17	Exercícios de fixação	21
17.1	Expoente zero e expoentes inteiros	21
17.2	Radicais e expoentes fracionários	22
17.3	Propriedades e expressões	23
17.4	Problemas contextualizados	23

18 Questões de aprofundamento	24
19 Avaliação-síntese	24
20 Gabarito comentado	25
20.1 Exercícios de fixação	25
20.2 Questões de aprofundamento	26
20.3 Avaliação-síntese	27
21 Resumo final	28

1 Apresentação e objetivos de aprendizagem

A potenciação foi inicialmente definida para expoentes naturais como uma forma abreviada de representar multiplicações repetidas. Entretanto, para que suas propriedades permaneçam coerentes em divisões, raízes e problemas de medida, é necessário ampliar o significado do expoente. Surgem, assim, o expoente zero, os expoentes inteiros negativos e os expoentes fracionários.

Este curso constrói essa ampliação sem apresentar as novas regras como simples receitas. Cada definição será motivada pela necessidade de preservar as propriedades fundamentais da potenciação.

Ao concluir o curso, espera-se que o estudante seja capaz de:

- identificar base, expoente e potência;
- interpretar expoentes naturais, zero, inteiros negativos e racionais;
- justificar por que $a^0 = 1$, quando $a \neq 0$;
- compreender que $a^{-n} = 1/a^n$ e reconhecer suas restrições;
- relacionar expoentes fracionários e radicais;
- calcular potências com expoentes racionais em casos exatos;
- aplicar corretamente as propriedades da potenciação;
- simplificar expressões envolvendo potências e radicais;
- determinar quando uma potência representa um número real;
- resolver problemas geométricos, científicos e cotidianos.

Correspondência com a BNCC

O curso desenvolve principalmente a habilidade **EF09MA03**: efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários. Também prepara o estudante para operações em notação científica e para o estudo de funções e equações.

2 Revisão: potências com expoentes naturais

2.1 Definição fundamental

Definição 2.1: Potência de expoente natural positivo

Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$. Define-se

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}.$$

O número a é a **base**, n é o **expoente** e a^n é a **potência**.

Notação

Indicaremos o conjunto dos números naturais positivos por

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Assim, escrever $n \in \mathbb{N}^*$ significa que n é natural e $n \geq 1$.

Exemplo

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}.$$

Base negativa e uso dos parênteses

Os parênteses determinam a base:

$$(-2)^4 = 16, \quad -2^4 = -(2^4) = -16.$$

Em $(-2)^4$, a base é -2 . Em -2^4 , a potenciação é realizada antes do sinal de oposição, de acordo com a ordem das operações.

Teorema 2.1: Sinal de uma potência de base negativa

Se $a < 0$ e n é natural positivo, então:

- $a^n > 0$ quando n é par;
- $a^n < 0$ quando n é ímpar.

Demonstração

Quando n é par, os fatores negativos podem ser agrupados aos pares, e cada par possui produto positivo. Quando n é ímpar, sobra um fator negativo após os agrupamentos, tornando o produto negativo.

2.2 Casos especiais de base

Para todo natural positivo n ,

$$1^n = 1, \quad 0^n = 0, \quad (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ -1, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Observação

Não se deve confundir a^n com an . Por exemplo,

$$5^3 = 125, \quad 5 \cdot 3 = 15.$$

O expoente indica uma potência, não uma multiplicação da base pelo expoente.

3 Propriedades fundamentais da potenciação

3.1 Produto de potências de mesma base

Teorema 3.1: Produto de mesma base

Para $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Demonstração

A primeira potência contém m fatores iguais a a e a segunda contém n . Ao multiplicá-las, obtemos $m + n$ fatores iguais a a :

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ fatores}} \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ fatores}} = a^{m+n}.$$

3.2 Quociente de potências de mesma base

Teorema 3.2: Quociente de mesma base

Se $a \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$, com $m \geq n$, então

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Demonstração

Cancelando os n fatores comuns no numerador e no denominador, restam $m - n$ fatores iguais a a no numerador.

3.3 Potência de uma potência

Teorema 3.3: Potência de potência

Para $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Demonstração

A expressão $(a^m)^n$ é o produto de n fatores iguais a a^m . Pela propriedade do produto de mesma base,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ fatores}} = a^{m+m+\cdots+m} = a^{mn}.$$

3.4 Potência de produto e de quociente

Teorema 3.4: Potência de um produto

Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Teorema 3.5: Potência de um quociente

Para $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Potência não distribui sobre soma ou subtração

Em geral,

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n \quad \text{e} \quad (a - b)^n \neq a^n - b^n.$$

Por exemplo,

$$(2 + 3)^2 = 25, \quad 2^2 + 3^2 = 13.$$

Quadro das propriedades naturais

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \quad (a \neq 0, m \geq n), \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

4 Expoente zero

4.1 Por que o expoente zero deve produzir 1?

Considere o quociente de uma potência não nula por ela mesma. Por um lado,

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Por outro, a propriedade do quociente sugere

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

Para que as duas expressões sejam coerentes, devemos ter $a^0 = 1$.

Definição 4.1: Potência de expoente zero

Para toda base real não nula a ,

$$a^0 = 1.$$

Exemplo

$$7^0 = 1, \quad (-15)^0 = 1, \quad \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1, \quad (\sqrt{2})^0 = 1.$$

O caso 0^0

A definição $a^0 = 1$ exige $a \neq 0$. No contexto elementar, a expressão

$$0^0$$

é considerada **indeterminada** e não deve receber automaticamente o valor 1.

4.2 Sequência de potências

Ao diminuir o expoente em uma unidade, dividimos a potência pela base:

$$a^3 = a^3 \xrightarrow{\div a} a^2 = a^2 \xrightarrow{\div a} a^1 = a \xrightarrow{\div a} a^0 = 1 \xrightarrow{\div a} a^{-1} = 1/a \xrightarrow{\div a} a^{-2} = 1/a^2$$

Esse padrão motiva os expoentes negativos.

5 Expoentes inteiros negativos

5.1 Definição

Definição 5.1: Potência de expoente inteiro negativo

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}^*$, define-se

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

O expoente negativo indica o **inverso multiplicativo** da potência de expoente positivo correspondente.

Exemplo

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001.$$

O expoente negativo não torna a potência negativa

O sinal do expoente não é o sinal do resultado:

$$2^{-3} = \frac{1}{8} > 0.$$

Já

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}.$$

O sinal do resultado depende da base e da paridade do expoente inteiro.

Teorema 5.1: Inversão de uma fração

Se $a, b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Demonstração

Pela definição de expoente negativo,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Exemplo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}.$$

5.2 Restrições envolvendo zero

Teorema 5.2: Impossibilidade de expoente negativo na base zero

Se $n \in \mathbb{N}^*$, a expressão 0^{-n} não representa um número real.

Demonstração

Pela definição,

$$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}.$$

Como a divisão por zero não é definida, 0^{-n} não existe em $\mathbb{R}$.

5.3 Propriedades para expoentes inteiros

Teorema 5.3: Leis dos expoentes inteiros

Se $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Demonstração de um caso com expoente negativo

Verifiquemos a primeira propriedade quando $m > 0$, $n < 0$ e $m > -n$. Escreva $n = -k$, com $k > 0$. Então

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{m+n}.$$

Os demais casos são obtidos de modo semelhante. A definição do expoente negativo foi escolhida precisamente para preservar essas propriedades.

Exemplo resolvido: simplificação

Simplifique

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^7}{3^3}.$$

Somando e subtraindo os expoentes,

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^7}{3^3} = 3^{-2+7-3} = 3^2 = 9.$$

Exemplo resolvido: expoente externo negativo

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^{-2}y^3}{x^4y^{-1}}\right)^{-2} &= (x^{-6}y^4)^{-2} \\ &= x^{12}y^{-8} \\ &= \frac{x^{12}}{y^8}, \end{aligned}$$

para $x, y \neq 0$.

5.4 Potências de base dez

Para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Assim,

$$10^{-1} = 0,1, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 10^{-3} = 0,001, \quad 10^{-6} = 0,000001.$$

Observação

Os expoentes negativos de base 10 são fundamentais para representar medidas muito pequenas, como espessuras, dimensões celulares e comprimentos de onda. Esse uso será aprofundado no curso de notação científica.

6 Radiciação e raízes n -ésimas

6.1 Radiciação como operação inversa

Definição 6.1: Raiz n -ésima

Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Uma **raiz n -ésima** de um número real a é um número real x que satisfaz

$$x^n = a.$$

Na expressão

$$\sqrt[n]{a},$$

n é o **índice**, a é o **radicando** e o símbolo $\sqrt{}$ é o **radical**. Quando $n = 2$, omitimos o índice:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}.$$

6.2 Índice par e índice ímpar

Teorema 6.1: Existência de raízes reais

Considere $n \geq 2$ inteiro.

- Se n é par, $\sqrt[n]{a}$ é real somente quando $a \geq 0$.
- Se n é ímpar, $\sqrt[n]{a}$ é real para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Toda potência de expoente par é não negativa. Portanto, não existe número real x tal que $x^n = a < 0$ quando n é par. Para índice ímpar, potências preservam o sinal: bases positivas produzem resultados positivos e bases negativas produzem resultados negativos, permitindo raízes de qualquer real.

Exemplo

$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad \sqrt[3]{-125} = -5, \quad \sqrt[6]{-64} \notin \mathbb{R}.$$

6.3 Raiz principal

Definição 6.2: Raiz principal

Quando o índice n é par e $a \geq 0$, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa a **raiz não negativa**, chamada raiz principal.

Raiz quadrada e soluções de uma equação

O símbolo $\sqrt{25}$ representa apenas 5:

$$\sqrt{25} = 5.$$

Entretanto, a equação $x^2 = 25$ possui duas soluções:

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5,$$

isto é, $x = \pm 5$. Não se escreve $\sqrt{25} = \pm 5$.

Teorema 6.2: Raiz de uma potência

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ par}, \\ a, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Exemplo

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7.$$

Portanto, em geral, $\sqrt{a^2} = |a|$, e não simplesmente a .

7 Propriedades dos radicais

Teorema 7.1: Produto de radicais de mesmo índice

Para $a, b \geq 0$ e $n \geq 2$,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

Para índice ímpar, a propriedade continua válida para radicandos reais.

Teorema 7.2: Quociente de radicais de mesmo índice

Para $a \geq 0$, $b > 0$ e $n \geq 2$,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Para índice ímpar, admite-se também $a < 0$ e $b < 0$, desde que $b \neq 0$.

Exemplo

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Radical não distribui sobre soma

Em geral,

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Por exemplo,

$$\sqrt{9+16} = 5, \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$$

Definição 7.1: Radicais semelhantes

Dois radicais são semelhantes quando, após simplificação, possuem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplo

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{27} &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Já $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não pode ser reduzido por adição.

8 Expoentes fracionários

8.1 A origem do expoente $1/n$

Queremos preservar a propriedade $(a^r)^s = a^{rs}$. Se $r = 1/n$, então

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{(1/n)n} = a.$$

Logo, $a^{1/n}$ deve representar o número cuja potência n -ésima é a . Isso motiva a definição

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Definição 8.1: Expoente fracionário positivo

Sejam $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e m/n uma fração irredutível. Para $a > 0$, define-se

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Quando $a = 0$, a definição vale apenas para $m/n > 0$.

Notação

No expoente m/n :

- o denominador n indica o índice da raiz;
- o numerador m indica a potência.

Assim,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Exemplo

$$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4, \quad 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3, \\ 32^{2/5} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = 2^2 = 4, \quad 81^{3/4} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Escolha da ordem de cálculo

Para calcular $64^{2/3}$, podemos escrever

$$64^{2/3} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16.$$

Também poderíamos calcular $\sqrt[3]{64^2}$, mas elevar primeiro produz números maiores. Em geral, é mais eficiente extrair a raiz antes de elevar à potência.

8.2 Expoente fracionário negativo

Definição 8.2: Expoente racional negativo

Se $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$, então

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Exemplo

$$16^{-3/4} = \frac{1}{16^{3/4}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{16})^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Exemplo

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-2/3} = \left(\frac{27}{8}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

8.3 Bases negativas

Teorema 8.1: Potências racionais de base negativa

Considere $a < 0$ e uma fração irredutível m/n , com $n > 0$.

- Se n é ímpar, $a^{m/n}$ pode ser definido em $\mathbb{R}$ por $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$.
- Se n é par, $a^{m/n}$ não representa um número real.

Exemplo

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2,$$

$$(-32)^{2/5} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^2 = (-2)^2 = 4,$$

enquanto

$$(-16)^{1/2} = \sqrt{-16} \notin \mathbb{R}.$$

Reduza a fração do expoente

Quando a base é negativa, o expoente deve ser escrito na forma irredutível antes de analisar a existência real. Por exemplo,

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Logo, a interpretação coerente é

$$(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = -2.$$

Aplicar diretamente $\sqrt[6]{(-8)^2}$ produziria 2, mostrando por que a redução prévia é indispensável nesse caso.

8.4 Quadro de existência no conjunto real

Situação	Condição de existência em $\mathbb{R}$
a^r , com $a > 0$	Existe para todo $r \in \mathbb{Q}$
0^r	Existe para $r > 0$; 0^0 é indeterminado e 0^r não existe para $r < 0$
$a^{m/n}$, com $a < 0$	Na forma irredutível, existe quando n é ímpar
Raiz de índice par	O radicando deve ser não negativo
Raiz de índice ímpar	O radicando pode ser qualquer real

9 Leis dos expoentes racionais

Teorema 9.1: Leis dos expoentes racionais positivos

Se $a, b > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então

$$a^r a^s = a^{r+s},$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

$$(a^r)^s = a^{rs},$$

$$(ab)^r = a^r b^r,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Observação

A hipótese $a, b > 0$ garante que todas as expressões estejam definidas em $\mathbb{R}$ e evita ambiguidades com raízes pares de números negativos. Em casos particulares de bases negativas, algumas propriedades continuam válidas, mas é necessário examinar o domínio antes de utilizá-las.

Produto de mesma base em um caso racional

Sejam $r = m/n$ e $s = p/n$, usando um denominador comum. Para $a > 0$,

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{m/n} a^{p/n} \\ &= \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^p} \\ &= \sqrt[n]{a^{m+p}} \\ &= a^{(m+p)/n} \\ &= a^{r+s}. \end{aligned}$$

Exemplo: produto e quociente

$$5^{2/3} \cdot 5^{7/6} = 5^{4/6+7/6} = 5^{11/6}.$$

Além disso,

$$\frac{2^{5/4}}{2^{-3/4}} = 2^{5/4-(-3/4)} = 2^{8/4} = 2^2 = 4.$$

Exemplo: potência de potência

$$(81^{3/4})^{2/3} = 81^{(3/4)(2/3)} = 81^{1/2} = 9.$$

Somar expoentes exige a mesma base

Não podemos escrever

$$2^3 \cdot 3^4 = 6^7.$$

A regra $a^m a^n = a^{m+n}$ exige bases iguais. Quando os expoentes são iguais, podemos usar outra propriedade:

$$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4.$$

10 Conversão entre potências e radicais

Equivalências fundamentais

Para $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Da potência para o radical

$$x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}, \quad y^{-2/7} = \frac{1}{\sqrt[7]{y^2}}.$$

Do radical para a potência

$$\sqrt[4]{a^7} = a^{7/4}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{b^5}} = b^{-5/3},$$

considerando bases e domínios adequados.

10.1 Simplificação por expoentes racionais

Exemplo

Para $x > 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{x^{15}} &= x^{15/6} \\ &= x^{5/2} \\ &= x^2 \sqrt{x}.\end{aligned}$$

Exemplo

Para $a, b > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a^5 b^2}}{\sqrt[3]{a^2 b^{-1}}} &= \frac{a^{5/3} b^{2/3}}{a^{2/3} b^{-1/3}} \\ &= a^1 b^1 \\ &= ab.\end{aligned}$$

11 Simplificação de expressões

11.1 Eliminação de expoentes negativos

Uma expressão costuma ser considerada mais simples quando apresenta apenas expoentes positivos. Fatores de expoente negativo podem atravessar a barra de fração, alterando o sinal do expoente:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

Exemplo

Para $x, y \neq 0$,

$$6x^{-3}y^2 = \frac{6y^2}{x^3}.$$

Exemplo resolvido completo

Simplifique

$$\frac{(2x^{-2}y^3)^2}{4x^3y^{-1}}.$$

Primeiro, aplicamos a potência ao produto:

$$(2x^{-2}y^3)^2 = 4x^{-4}y^6.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{4x^{-4}y^6}{4x^3y^{-1}} &= x^{-4-3}y^{6-(-1)} \\ &= x^{-7}y^7 \\ &= \frac{y^7}{x^7} = \left(\frac{y}{x}\right)^7.\end{aligned}$$

11.2 Extração de fatores do radical

Exemplo

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{432} &= \sqrt[3]{216 \cdot 2} \\ &= \sqrt[3]{6^3 \cdot 2} \\ &= 6\sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

Exemplo

Se $x \geq 0$, então

$$\sqrt{72x^5} = \sqrt{36x^4 \cdot 2x} = 6x^2\sqrt{2x}.$$

11.3 Racionalização simples

Definição 11.1: Racionalização

Racionalizar uma fração significa obter uma fração equivalente cujo denominador não contenha radical.

Exemplo

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Denominador com raiz cúbica

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}.$$

Multiplicamos por $\sqrt[3]{25}$ porque $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = 5$.

12 Ordem de grandeza e comportamento das potências

Teorema 12.1: Efeito de expoentes positivos e negativos

Se $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$a^n > 1 \quad \text{e} \quad 0 < a^{-n} < 1.$$

Se $0 < a < 1$, ocorre o contrário:

$$0 < a^n < 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} > 1.$$

Demonstração

Se $a > 1$, multiplicar fatores maiores que 1 produz uma potência maior que 1. Seu inverso fica entre 0 e 1. Se $0 < a < 1$, o produto de fatores entre 0 e 1 diminui, enquanto seu inverso é maior que 1.

Exemplo

mas

$$2^4 = 16, \quad 2^{-4} = \frac{1}{16},$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16.$$

Teorema 12.2: Comparação com expoentes fracionários

Se $a > 1$ e $r < s$, então $a^r < a^s$. Se $0 < a < 1$ e $r < s$, então $a^r > a^s$, para expoentes racionais em que as potências estejam definidas.

Exemplo

Como $2 > 1$ e $1/2 < 2/3$,

$$2^{1/2} < 2^{2/3}.$$

Já para $0 < 1/4 < 1$,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}.$$

13 Aplicações geométricas e científicas

13.1 Lado de um quadrado a partir da área

Teorema 13.1: Lado de um quadrado

Se um quadrado possui área $A > 0$, seu lado é

$$\ell = A^{1/2} = \sqrt{A}.$$

Exemplo

Um terreno quadrado possui área de 450 m^2 . Seu lado exato é

$$\ell = 450^{1/2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2} \text{ m.}$$

Como $\sqrt{2} \approx 1,4142$,

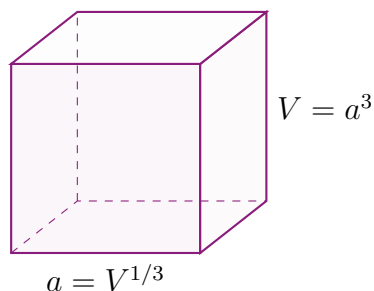
$$\ell \approx 21,21 \text{ m.}$$

13.2 Aresta de um cubo a partir do volume

Teorema 13.2: Aresta de um cubo

Se um cubo possui volume $V > 0$, sua aresta mede

$$a = V^{1/3} = \sqrt[3]{V}.$$



Exemplo

Uma caixa cúbica possui volume de 512 cm^3 . Sua aresta é

$$a = 512^{1/3} = \sqrt[3]{512} = 8 \text{ cm.}$$

13.3 Escalas de área e volume

Teorema 13.3: Fatores lineares, de área e de volume

Se todas as medidas lineares de uma figura são multiplicadas por $k > 0$, então:

- os comprimentos são multiplicados por k ;
- as áreas são multiplicadas por k^2 ;
- os volumes são multiplicados por k^3 .

Inversamente, um fator de área F corresponde ao fator linear $F^{1/2}$, e um fator de volume G corresponde ao fator linear $G^{1/3}$.

Exemplo

Se o volume de dois sólidos semelhantes está na razão $27 : 8$, a razão entre as medidas

lineares é

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}.$$

13.4 Grandezas inversamente proporcionais a potências

Lei do inverso do quadrado

Em vários modelos físicos, uma intensidade I varia com o inverso do quadrado da distância d :

$$I = kd^{-2} = \frac{k}{d^2}.$$

Se a distância triplica, a nova intensidade é

$$I_{\text{nova}} = k(3d)^{-2} = \frac{k}{9d^2} = \frac{I}{9}.$$

Atividade investigativa: quadrados, cubos e expoentes

Construa uma tabela para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ contendo n , n^2 , n^3 , $n^{1/2}$ e $n^{1/3}$. Em seguida:

1. identifique quais raízes são inteiras;
2. compare o crescimento de n^2 e n^3 ;
3. explique por que $n^{1/3} < n^{1/2} < n$ para $n > 1$;
4. represente os dados em um plano cartesiano, usando cores diferentes.

14 Equações elementares com potências e raízes

14.1 Equações do tipo $x^n = a$

Teorema 14.1: Soluções reais de $x^n = a$

Se $n \geq 2$ é inteiro:

- para n par e $a > 0$, $x^n = a$ possui duas soluções: $x = \pm a^{1/n}$;
- para n par e $a = 0$, possui a única solução $x = 0$;
- para n par e $a < 0$, não possui solução real;
- para n ímpar, possui uma única solução real: $x = a^{1/n}$.

Exemplo

$$x^4 = 81 \implies x = \pm 81^{1/4} = \pm 3.$$

Exemplo

$$x^3 = -125 \implies x = (-125)^{1/3} = -5.$$

14.2 Equações com expoentes negativos

Exemplo

Resolva $x^{-2} = 1/16$, com $x \neq 0$.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{16} \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4.$$

14.3 Equações com expoentes fracionários

Exemplo

Resolva $x^{3/2} = 8$, considerando $x \geq 0$.

$$\left(x^{3/2}\right)^{2/3} = 8^{2/3} \implies x = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4.$$

Verificação:

$$4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8.$$

Verifique as soluções

Ao elevar ambos os lados de uma equação a uma potência par, podem surgir soluções que não satisfazem a equação original. Por isso, toda solução obtida deve ser substituída na expressão inicial.

15 Erros frequentes

Erro 1: interpretar expoente negativo como sinal negativo

$$3^{-2} \neq -3^2.$$

O correto é

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Erro 2: esquecer de inverter toda a fração

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

e não $-4/9$ nem $4/9$.

Erro 3: confundir a^{-n} com $-a^n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

enquanto $-a^n$ é o oposto de a^n .

Erro 4: somar expoentes em uma adição

$$2^3 + 2^4 \neq 2^7.$$

A soma dos expoentes é permitida no *produto* de potências de mesma base:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7.$$

Erro 5: multiplicar expoentes sem potência externa

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

São situações distintas.

Erro 6: esquecer o módulo

Em geral,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

pois a raiz quadrada principal é não negativa. Se $x = -5$, então $\sqrt{x^2} = \sqrt{25} = 5$, e não -5 .

Erro 7: distribuir raiz sobre soma

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

em geral. As propriedades de produto e quociente não se estendem à soma.

Erro 8: ignorar o domínio real

$$(-16)^{1/2} \notin \mathbb{R},$$

pois não existe número real cujo quadrado seja -16 .

16 Estratégias de resolução

Roteiro para calcular $a^{m/n}$

1. reduza a fração m/n , principalmente se a base for negativa;
2. examine se a expressão existe em $\mathbb{R}$;
3. use n como índice da raiz e m como expoente;
4. se $m < 0$, calcule o inverso;

5. quando possível, extraia a raiz antes de elevar à potência;
6. verifique se o resultado pode ser simplificado.

Roteiro para simplificar expressões

1. determine as restrições: denominadores não podem ser zero e raízes pares exigem radicandos não negativos;
2. aplique potências externas a cada fator do produto ou quociente;
3. agrupe potências de mesma base;
4. some expoentes em produtos e subtraia em quocientes;
5. converta expoentes negativos em inversos;
6. simplifique frações e radicais;
7. apresente o resultado com expoentes positivos, quando solicitado.

Problema integrado

Calcule

$$E = \frac{16^{-1/2} \cdot 8^{2/3}}{2^{-3}}.$$

Calculando cada potência,

$$16^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}, \quad 8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Portanto,

$$E = \frac{(1/4) \cdot 4}{1/8} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

17 Exercícios de fixação

17.1 Expoente zero e expoentes inteiros

1. Calcule:

- | | | |
|---------------|------------------|--------------------------------------|
| a) 5^0 ; | c) 2^{-4} ; | e) 10^{-5} ; |
| b) $(-9)^0$; | d) $(-3)^{-3}$; | f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. |

2. Escreva sem expoentes negativos:

- | | | |
|----------------|------------------------------|--------------------------------------|
| a) x^{-5} ; | c) $\frac{x^{-2}}{y^{-4}}$; | e) $\frac{1}{m^{-6}}$; |
| b) $4a^{-3}$; | d) $(ab)^{-2}$; | f) $\left(\frac{p}{q}\right)^{-3}$. |

3. Simplifique, supondo as bases não nulas:

a) $2^{-3} \cdot 2^7$;

d) $\frac{x^4 x^{-7}}{x^{-5}}$;

b) $\frac{5^2}{5^{-3}}$;

e) $(a^{-2} b^3)^{-2}$;

c) $(3^{-2})^3$;

f) $\frac{m^{-3} n^5}{m^2 n^{-1}}$.

4. Determine quais expressões não estão definidas em $\mathbb{R}$:

$$0^5, \quad 0^0, \quad 0^{-2}, \quad (-2)^{-4}, \quad 4^{-1}.$$

5. Compare sem calculadora:

a) 2^{-3} e 2^{-4} ;

c) $(-2)^{-3}$ e $(-2)^{-2}$;

b) $(1/3)^{-2}$ e $(1/3)^{-3}$;

d) 10^{-5} e 0,00001.

17.2 Radicais e expoentes fracionários

6. Converta para radical:

a) $a^{1/2}$;

c) $y^{-2/3}$;

e) $p^{-1/6}$;

b) $x^{3/5}$;

d) $m^{7/4}$;

f) $z^{5/2}$.

7. Converta para potência de expoente racional:

a) $\sqrt{x}$;

c) $\sqrt[5]{b^7}$;

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{p^3}}$;

b) $\sqrt[3]{a^2}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{m}}$;

f) $\sqrt[6]{q}$.

8. Calcule exatamente:

a) $25^{1/2}$;

c) $16^{3/4}$;

e) $125^{-2/3}$;

b) $64^{1/3}$;

d) $32^{2/5}$;

f) $81^{-3/4}$;

9. Calcule, se o resultado for real, ou escreva “não real”:

a) $(-27)^{1/3}$;

c) $(-32)^{2/5}$;

e) $(-81)^{3/4}$;

b) $(-16)^{1/2}$;

d) $(-8)^{4/3}$;

f) $(-1)^{7/9}$.

10. Simplifique:

a) $\sqrt{48}$;

d) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$;

b) $\sqrt[3]{250}$;

e) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$;

c) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$;

f) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

11. Racionalize:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $\frac{1}{\sqrt{2}};$ | c) $\frac{3}{2\sqrt{3}};$ | e) $\frac{5}{\sqrt[3]{25}};$ |
| b) $\frac{7}{\sqrt{5}};$ | d) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}};$ | f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}.$ |

17.3 Propriedades e expressões

12. Simplifique, para bases positivas:

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $a^{2/3}a^{5/6};$ | e) $\frac{p^{5/3}q^{-2/3}}{p^{-1/3}q^{1/3}};$ |
| b) $\frac{x^{7/4}}{x^{-1/2}};$ | f) $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{-1/3}}\right)^6.$ |
| c) $(m^{3/5})^{10/9};$ | |
| d) $(ab)^{3/2}a^{-1/2}b^{-1};$ | |

13. Calcule:

$$\frac{27^{2/3} \cdot 16^{-1/2}}{8^{-1/3}}.$$

14. Verifique se cada igualdade é verdadeira. Quando for falsa, dê um contraexemplo:

- a) $a^m + a^n = a^{m+n};$
- b) $a^m a^n = a^{m+n};$
- c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2;$
- d) $(ab)^r = a^r b^r$, para $a, b > 0$;
- e) $\sqrt{a^2} = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
- f) $a^{-n} = -a^n.$

15. Determine o valor de x :

- | | |
|---------------------|--------------------------------------|
| a) $x^2 = 49;$ | d) $x^{3/2} = 27$, com $x \geq 0$; |
| b) $x^3 = -64;$ | e) $x^{1/3} = 5;$ |
| c) $x^{-2} = 1/25;$ | f) $x^4 = 16.$ |

17.4 Problemas contextualizados

- 16. Um quadrado possui área de 288 cm^2 . Determine o lado na forma exata e aproximada aos centésimos.
- 17. Um cubo possui volume de 3375 cm^3 . Determine sua aresta.
- 18. Dois cubos semelhantes têm volumes na razão $125 : 64$. Qual é a razão entre suas arestas?
- 19. A intensidade luminosa é modelada por $I = 900d^{-2}$, em que d é a distância em metros. Calcule I para $d = 3$ e $d = 6$ e compare.

20. Uma bactéria mede aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ m. Escreva essa medida como fração de metro e em micrômetros, sabendo que $1 \mu\text{m} = 10^{-6}$ m.
21. A área de uma maquete foi multiplicada por 9. Mantendo a semelhança, por qual fator as medidas lineares foram multiplicadas? E o volume?
22. Uma caixa cúbica deve comportar 2000 cm^3 . Escreva a aresta mínima na forma de potência e estime-a entre dois inteiros consecutivos.

18 Questões de aprofundamento

A1. Explique por que a definição $a^{-n} = 1/a^n$ não é arbitrária, mas necessária para preservar a lei do produto de potências de mesma base.

A2. Demonstre que, para $a \neq 0$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

A3. Simplifique, para $x > 0$,

$$\frac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{x^{-1/2}}.$$

A4. Mostre que

$$4^{1/2} \cdot 8^{1/3} = 4.$$

Em seguida, escreva todo o cálculo usando apenas potências de base 2.

A5. Se $a > 0$, mostre que

$$a^{m/n} = a^{km/kn}$$

para todo inteiro positivo k .

A6. Explique por que a igualdade anterior exige cuidado quando $a < 0$. Utilize $a = -8$ e os expoentes $1/3$ e $2/6$.

A7. Resolva em $\mathbb{R}$:

$$(x - 1)^{3/2} = 8.$$

A8. Determine todos os valores reais de x para os quais

$$\sqrt{x^2} = x.$$

A9. Sem calculadora, compare $3^{1/2}$ e $2^{2/3}$. Sugestão: eleve ambos a uma potência conveniente que preserve a ordem.

A10. Uma grandeza é proporcional a r^{-3} . Por qual fator ela se altera quando r é reduzido à metade?

19 Avaliação-síntese

1. Justifique as definições de a^0 e a^{-n} .

2. Calcule:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}.$$

3. Escreva com expoentes positivos e simplifique:

$$\frac{x^{-4}y^3}{x^2y^{-2}}.$$

4. Calcule exatamente:

$$256^{3/4}.$$

5. Determine se $(-64)^{5/6}$ representa um número real e justifique.

6. Converta $\sqrt[5]{a^7}$ para potência de expoente racional.

7. Simplifique:

$$\frac{2^{5/3} \cdot 2^{-1/6}}{2^{1/2}}.$$

8. Resolva em $\mathbb{R}$:

$$x^{-2} = \frac{1}{36}.$$

9. Um cubo tem volume de 1728 cm^3 . Determine sua aresta e a área total.

10. Corrija a afirmação: “Como $\sqrt{a^2} = a$, temos $\sqrt{(-7)^2} = -7$.”

20 Gabarito comentado

20.1 Exercícios de fixação

1. a) 1; b) 1; c) $1/16$; d) $-1/27$; e) $1/100000 = 0,00001$; f) $(5/2)^2 = 25/4$.
2. a) $1/x^5$; b) $4/a^3$; c) y^4/x^2 ; d) $1/(a^2b^2)$; e) m^6 ; f) $(q/p)^3$.
3. a) $2^4 = 16$; b) $5^5 = 3125$; c) $3^{-6} = 1/729$; d) $x^{4-7+5} = x^2$; e) a^4/b^6 ; f) n^6/m^5 .
4. 0^0 é indeterminado e 0^{-2} não existe em $\mathbb{R}$. As demais estão definidas: $0^5 = 0$, $(-2)^{-4} = 1/16$ e $4^{-1} = 1/4$.
5. a) $2^{-3} > 2^{-4}$; b) $(1/3)^{-2} < (1/3)^{-3}$; c) $(-2)^{-3} < (-2)^{-2}$; d) são iguais.
6. a) $\sqrt{a}$; b) $\sqrt[5]{x^3}$; c) $1/\sqrt[3]{y^2}$; d) $\sqrt[4]{m^7}$; e) $1/\sqrt[6]{p}$; f) $\sqrt{z^5}$.
7. a) $x^{1/2}$; b) $a^{2/3}$; c) $b^{7/5}$; d) $m^{-1/2}$; e) $p^{-3/4}$; f) $q^{1/6}$.
8. a) 5; b) 4; c) 8; d) 4; e) $1/25$; f) $1/27$.
9. a) -3 ; b) não real; c) 4; d) 16; e) não real; f) -1 .
10. a) $4\sqrt{3}$; b) $5\sqrt[3]{2}$; c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; d) $2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$; e) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; f) $\sqrt{25} = 5$.
11. a) $\sqrt{2}/2$; b) $7\sqrt{5}/5$; c) $\sqrt{3}/2$; d) $\sqrt[3]{2}$; e) $\sqrt[3]{5}$; f) $\sqrt{3}$.
12. a) $a^{3/2}$; b) $x^{9/4}$; c) $m^{2/3}$; d) $ab^{1/2}$; e) p^2/q ; f) x^3y^2 .

- 13.

$$\frac{27^{2/3} \cdot 16^{-1/2}}{8^{-1/3}} = \frac{9 \cdot (1/4)}{1/2} = \frac{9}{2}.$$

14. a) falsa, por exemplo $2^1 + 2^2 = 6 \neq 8 = 2^3$; b) verdadeira; c) falsa, por exemplo $(1+1)^2 = 4 \neq 2$; d) verdadeira nas hipóteses indicadas; e) falsa, pois $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$; f) falsa, pois $2^{-1} = 1/2 \neq -2$.

15. a) $x = \pm 7$; b) $x = -4$; c) $x = \pm 5$; d) $x = 9$; e) $x = 125$; f) $x = \pm 2$.

16.

$$\ell = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \text{ cm} \approx 16,97 \text{ cm}.$$

17. $a = 3375^{1/3} = 15 \text{ cm}$.

18. A razão entre as arestas é

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{1/3} = \frac{5}{4}.$$

19. Para $d = 3$, $I = 900/9 = 100$. Para $d = 6$, $I = 900/36 = 25$. Ao dobrar a distância, a intensidade foi dividida por 4.

20.

$$2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \frac{2}{1000000} \text{ m} = 2 \mu\text{m}.$$

21. O fator linear é $9^{1/2} = 3$. O volume é multiplicado por $3^3 = 27$.

22. A aresta mínima é $2000^{1/3} \text{ cm}$. Como $12^3 = 1728 < 2000 < 2197 = 13^3$, ela está entre 12 e 13 cm.

20.2 Questões de aprofundamento

A1. Para preservar $a^m a^n = a^{m+n}$, devemos ter

$$a^n a^{-n} = a^0 = 1.$$

Portanto, a^{-n} deve ser o inverso de a^n , isto é, $1/a^n$.

A2.

$$(a^{-1})^{-1} = \frac{1}{a^{-1}} = \frac{1}{1/a} = a.$$

A3.

$$\frac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{x^{-1/2}} = x^{1/2 - (-1/2)} - 1 = x - 1.$$

A4. $4^{1/2} = 2$ e $8^{1/3} = 2$, logo o produto é 4. Em base 2,

$$(2^2)^{1/2} (2^3)^{1/3} = 2^1 \cdot 2^1 = 2^2 = 4.$$

A5. Para $a > 0$,

$$a^{km/kn} = \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

A igualdade decorre da unicidade da raiz principal positiva.

A6. Para base negativa, $\sqrt[kn]{a^{km}}$ pode envolver índice par mesmo quando a forma reduzida tem denominador ímpar. Em particular, $(-8)^{1/3} = -2$, enquanto a aplicação ingênua de $\sqrt[6]{(-8)^2}$ daria 2. Por isso, reduzimos o expoente antes.

A7. Como a base deve ser não negativa,

$$x - 1 = 8^{2/3} = 4,$$

logo $x = 5$.

A8. Como $\sqrt{x^2} = |x|$, a igualdade $|x| = x$ ocorre exatamente quando $x \geq 0$.

A9. Ambos são positivos. Elevando à sexta potência,

$$(3^{1/2})^6 = 3^3 = 27, \quad (2^{2/3})^6 = 2^4 = 16.$$

Logo, $3^{1/2} > 2^{2/3}$.

A10. Se $G = kr^{-3}$ e r é substituído por $r/2$, então

$$G_{\text{novo}} = k(r/2)^{-3} = 2^3 kr^{-3} = 8G.$$

A grandeza é multiplicada por 8.

20.3 Avaliação-síntese

1. Para preservar $a^n/a^n = a^{n-n}$, definimos $a^0 = 1$, com $a \neq 0$. Para preservar $a^n a^{-n} = a^0 = 1$, definimos $a^{-n} = 1/a^n$.

2.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}.$$

3.

$$\frac{x^{-4}y^3}{x^2y^{-2}} = x^{-6}y^5 = \frac{y^5}{x^6}.$$

4.

$$256^{3/4} = (\sqrt[4]{256})^3 = 4^3 = 64.$$

5. Não representa número real. Na fração irredutível $5/6$, o denominador é par, o que exigiria uma raiz sexta de número negativo.

6.

$$\sqrt[5]{a^7} = a^{7/5},$$

no domínio apropriado.

7.

$$\frac{2^{5/3}2^{-1/6}}{2^{1/2}} = 2^{10/6-1/6-3/6} = 2^{6/6} = 2.$$

8.

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{36} \implies x^2 = 36 \implies x = \pm 6.$$

9. A aresta é $a = 1728^{1/3} = 12$ cm. A área total é

$$A_T = 6a^2 = 6 \cdot 144 = 864 \text{ cm}^2.$$

10. O correto é $\sqrt{a^2} = |a|$. Portanto,

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7.$$

21 Resumo final

Mapa conceitual

- Para $n \in \mathbb{N}^*$, a^n representa o produto de n fatores iguais a a .
- Para $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
- Para $a \neq 0$ e $n > 0$, $a^{-n} = 1/a^n$.
- O expoente negativo indica inversão, não resultado negativo.
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ e $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, no domínio adequado.
- O denominador do expoente indica a raiz e o numerador indica a potência.
- Para expoentes racionais negativos, $a^{-m/n} = 1/a^{m/n}$.
- Raízes de índice par exigem radicando não negativo em $\mathbb{R}$; raízes de índice ímpar admitem qualquer radicando real.
- Para base negativa, a fração do expoente deve ser reduzida; o denominador reduzido deve ser ímpar.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ para n par e a para n ímpar.
- As propriedades de produto e quociente não se distribuem sobre somas.
- Expoentes $1/2$ e $1/3$ aparecem naturalmente em problemas de área e volume.

Ideia central

Os expoentes zero, negativos e fracionários não são regras isoladas: eles são definidos de modo que a linguagem das potências permaneça coerente ao incluir inversos, raízes e novas situações de cálculo.